

# GRÁFICO DE CONTROLE DE CALIBRAÇÃO FUNCIONAL COM SUPOSIÇÃO DE VARIÂNCIA DOS ERROS DE MEDIDAS CONHECIDA

Manoel DOMINGOS FILHO<sup>1</sup>

Robert Wayne SAMOHYL<sup>2</sup>

- **RESUMO:** Este artigo tem como objetivo principal a construção de gráficos de controle utilizando o modelo de calibração funcional. Para este propósito é considerado que a variância dos erros de medidas envolvidos no modelo de calibração funcional seja conhecida, ou possível de ser estimada, pois esta é uma das condições de regularidade do modelo de calibração funcional. Mais precisamente, a suposição de se conhecer uma das variâncias dos erros faz com que o modelo funcional seja factível, isto é, torna possível estimar os parâmetros do modelo. Considera-se, também, que os erros de medidas das variáveis dependentes e independentes sejam aditivos e normalmente distribuídos.
- **PALAVRAS CHAVES:** Calibração funcional; gráfico de controle; erros de medidas.

## 1 Introdução

As técnicas e métodos estatísticos vêm se destacando cada vez mais no estudo e na solução de muitos fenômenos que ocorrem em diversas áreas do conhecimento humano. Na Engenharia de Produção, por exemplo, onde a procura para se obter técnicas e métodos, que visam à melhoria da qualidade de processos e serviços, os métodos estatísticos têm seu papel de destaque, principalmente, o método denominado de Controle Estatístico de Processo (CEP). Este método consiste em monitorar o desempenho de processos, ao longo do tempo, com o objetivo de detectar a presença de causas especiais, que podem levar a um aumento da variabilidade do processo ou então deslocar a média do processo de seu “valor alvo”. Qualquer que seja a situação (aumento da variabilidade ou desvio da média) a qualidade final do produto fica comprometida. Assim, sempre que uma causa especial de má qualidade é detectada ela precisa de algum modo, ser eliminada do processo. Os gráficos de controle constituem-se em uma ferramenta muito útil na detecção de causas especiais em um processo. David Garvin (1984), ao escrever suas abordagens sobre o que o consumidor considera, quando decide adquirir um produto ou utilizar um serviço, descreve que aquele seleciona um produto ou um serviço pelas características que

---

<sup>1</sup> Universidade Federal do Acre - UFAC, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Rio Branco, AC, Brasil. E-mail: [manoelufsc@yahoo.com.br](mailto:manoelufsc@yahoo.com.br)

<sup>2</sup> Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, Departamento de Engenharia de Produção, Florianópolis, SC, Brasil. E-mail: [samohyl@deps.ufsc.br](mailto:samohyl@deps.ufsc.br)

eles têm, mas a seleção de quais dessas características estarão presentes nesse produto ou serviço é uma decisão da empresa. Essas características, chamadas de características da qualidade, são, muitas vezes, associadas a variáveis que podem ser mensuradas, isto é, podem ser medidas fisicamente.

Existem muitas situações onde uma dessas variáveis relaciona-se com outras tendo um modelo matemático que explique tal relacionamento. Por exemplo, o desgaste de um pneu pode ser explicado pela quilometragem rodada, pela temperatura do asfalto, pelo grau de dureza do composto da borracha etc. Para o engenheiro da qualidade é muito importante saber equacionar o comportamento dessas variáveis, no sentido de se poderem tomar decisões coerentes. Existem muitas situações em que alguma causa não comum passa a atuar no processo, desestabilizando-o, necessitando, assim, que se façam uma intervenção no mesmo para eliminar tais causas. Porém, a intervenção no processo costuma gerar altos custos para a empresa. O ideal para toda empresa seria prever o momento em que o processo necessite ser ajustado para evitar que o mesmo venha produzir itens não conformes. Ocorre, porém, que para fazer tal previsão, se faz necessário que o processo esteja funcionando completamente isento de causas especiais ou atribuíveis. Além disso, se faz necessário que o processo analisado tenha alguma relação entre as variáveis mensuráveis.

A literatura já dispõe de grande quantidade de material sobre a construção de gráfico de controle para a reta de regressão linear simples, considerando a variável independente como sendo uma constante, que é obtida sem erro de medida. Em outras palavras, a variável independente não é uma variável aleatória. Porém, a prática tem mostrado que as variáveis provenientes de medições físicas geralmente apresentam erros de medidas (Fuller, 1987). Na verdade, os erros de mensuração podem estar presentes tanto na variável dependente quanto na variável independente. A única maneira de se conhecer quaisquer características da qualidade, quantitativamente, é através de medições (Shewhart, 1939). Porém, quando isto acontece, diz-se que tais características possuem erros de medida.

Embora a natureza apresente muitos problemas em que a relação entre as variáveis seja não linear, a maioria dos estudos sobre o problema da calibração tem se dedicado a estudar a calibração linear. Neste artigo é apresentado o modelo de calibração linear, uma vez que o relacionamento linear entre variáveis se aplica em muitas áreas do conhecimento. Além disso, muitos modelos não lineares podem ser linearizados por algum processo de transformação, o que possibilita a utilização das técnicas utilizadas em modelos lineares.

O problema de calibração é usualmente caracterizado por duas variáveis, digamos  $X_i$  e  $Y_i$ , supostamente relacionadas por meio de uma função  $f$  conhecida, de tal forma que  $Y_i$  seja um valor obtido com um erro de observação  $\varepsilon_i$ , e  $X_i$  é uma quantidade fixa ou controlada, portanto sem erro de medida, definida em um intervalo  $I$  denominado de intervalo de calibração.

Na primeira etapa do experimento de calibração, amostram-se  $n$  observações da variável aleatória  $Y_i$ , a partir de valores prefixados de  $X_i$ , de modo que se possa estimar a função  $f$  que relaciona as duas variáveis. Portanto,  $X_i$  e  $Y_i$  podem se relacionar através do modelo  $Y_i = f(X_i) + \varepsilon_i$ . Numa segunda etapa, “a calibração propriamente dita”, seleciona-se uma amostra aleatória de tamanho  $k(k \geq 1)$  da variável  $Y_i$ , digamos  $Y_0$ , correspondente a um único valor de  $X_i$  desconhecido, digamos  $X_0$ . Deseja-se, então,

estimar este valor desconhecido  $X_0$  baseado nas informações do ponto de interesse e da função estimada no experimento de calibração. O modelo de calibração linear pode ser formalmente definido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} Y_i &= \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ Y_{0i} &= \alpha + \beta X_0 + \varepsilon_{0i}, \quad i = n + 1, \dots, n + k, \end{aligned} \quad (1)$$

em que  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{0n+1}, \dots, \varepsilon_{0n+k}$  são mutuamente independentes e identicamente distribuídos com média zero e variância constante  $\sigma_\varepsilon^2$ . As quantidades  $X_1, \dots, X_n$  são consideradas constantes conhecidas enquanto que  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $X_0$  e  $\sigma_\varepsilon^2$  são os parâmetros desconhecidos. A primeira equação do modelo (1) diz respeito à primeira etapa do processo de calibração e a segunda equação se refere à segunda etapa do modelo, também chamada de calibração propriamente dita.

## 2 Metodologia

Para obter os limites do gráfico de controle utilizando o modelo de calibração funcional faz-se necessário primeiramente definir matematicamente o modelo e quais os parâmetros envolvidos nele. Uma vez estabelecidos quais os parâmetros do modelo, o passo seguinte consiste em obter expressões para os estimadores dos parâmetros. Neste artigo as expressões são assintóticas tanto para o vício quanto para o erro quadrático médio dos estimadores como mostrado em Shukla (1972). Em outras palavras, uma vez estabelecida a expressão matemática dos estimadores, faz-se expansão em série de Taylor em torno de um ponto conveniente para obter a variância assintótica e conseqüentemente o vício e o erro quadrático médio. Acontece que num modelo de calibração existem outros parâmetros além do vício e do erro quadrático médio. Para estimar esses outros parâmetros do modelo é utilizada a linguagem usual para as expressões algébricas, isto é, usa-se a nomenclatura, estimadores. Particularmente o interesse maior pelos parâmetros se concentra na variância dos erros de mensuração, pois a suposição inicial é que esta variância seja conhecida ou possível de ser estimada. Para verificar o comportamento assintótico das expressões algébricas, se realizará algumas simulações de dados.

## 3 Resultados e discussão

Nesta seção será mostrado detalhadamente como se obtém a variância dos erros de mensuração. Será mostrado também o mecanismo de formação de erros no cotidiano de uma fábrica. Além disso, será definido o modelo de calibração funcional e suas propriedades.

### 3.1 Obtenção da variância dos erros de medida $\sigma_{Med}^2$

O monitoramento de um processo se dá através da medição de uma característica da qualidade  $X_i$  por meio de algum sistema de medição, Costa et al. (2004). Idealmente, este sistema de medição deveria produzir somente resultados corretos, coincidindo sempre

com o valor verdadeiro da grandeza mensurada. Infelizmente, a prática tem mostrado que todo processo de medição produz resultados com erros. Por exemplo, se em uma mesma peça for realizada medições sucessivas da característica  $X_i$  ter-se-á uma dispersão de valores em torno de um ponto central, e cada valor medido de  $X_i$  traz embutido um erro de medição, de modo que a variabilidade total, que se observa nos valores mensurados de  $X_i$  divide-se em duas componentes, as quais são: a variabilidade real da característica inerente ao processo produtivo como consequência de causas aleatórias e a variabilidade inerente ao processo de medição. Se os erros de medição forem independentes do valor verdadeiro da grandeza então a variância total observada é dada por:

$$\sigma_{Tot}^2 = \sigma_{Proc}^2 + \sigma_{Med}^2 \quad (2)$$

em que  $\sigma_{Tot}^2$  é a variância total que se observa, ao realizar medidas da característica da qualidade do processo;  $\sigma_{Proc}^2$  é a variância dos valores verdadeiros da característica intrínseca do processo, e  $\sigma_{Med}^2$  é a variância inerente à medição, isto é, a variância do erro de medição.

Neste artigo, o interesse maior é pela obtenção de uma estimativa da variância do erro de medição que será denotado por  $\sigma_{Med}^2$ . Esse erro de medida é obtido, fazendo-se a diferença entre o valor verdadeiro do mensurando e o resultado de uma medição desse mesmo mensurando. O erro  $\delta_i$  pode ser decomposto em duas partes: o erro sistemático e o erro aleatório. O erro sistemático, também conhecido como tendência, é a diferença entre o valor médio resultante de infinitas medições do mesmo mensurando sob as mesmas condições e o valor verdadeiro do mensurando. Já o erro aleatório é a diferença entre o resultado da medição e esse valor médio, descrito acima, e, por definição, tem média nula. Por outro lado, a variância do erro de medida decompõe-se em duas componentes da seguinte forma:

$$\sigma_{Med}^2 = \sigma_{Repet}^2 + \sigma_{Repro}^2 \quad (3)$$

em que  $\sigma_{Med}^2$  é a variância do erro de medição,  $\sigma_{Repet}^2$  é a variância do erro de repetibilidade e  $\sigma_{Repro}^2$  é a variância do erro de reprodutibilidade.

A repetibilidade é definida como o grau de concordância entre resultados de medições sucessivas de um mesmo mensurando sob as mesmas condições de medição. Essas condições são chamadas de condições de repetibilidade e englobam o mesmo procedimento de medição, o mesmo observador, o mesmo instrumento de medida utilizado nas mesmas condições, mesmo local e repetição em curto período de tempo.

A reprodutibilidade é definida como o grau de concordância entre os resultados das medições de um mesmo mensurando, efetuadas sob condições variadas de medição como, por exemplo, o operador do instrumento.

Para estimar a variância do erro de medição faz-se necessário estimar, primeiramente, a variância do erro de repetibilidade e do erro de reprodutibilidade. Existem várias maneiras para proceder-se nesta direção. Contudo, as formas mais utilizadas e também mais simples são:

$$\hat{\sigma}_{Repet}^2 = \frac{\bar{R}}{d_2} \quad (4)$$

em que  $\bar{R}$  é a média das diversas amplitudes amostrais,  $d_2$  é uma constante que se encontra tabelada em diversas obras relacionadas sobre o assunto aqui tratado, e que depende do tamanho  $n$  da amostra. Por exemplo, se o tamanho da amostra for igual a 2, então, o valor da constante  $d_2$  é igual a 1,128.

Para estimar a variância dos erros de reprodutibilidade deve-se lembrar de que essa variância ocorre quando um mesmo instrumento é utilizado sob diversas condições, tais como: operadores diferentes e/ou procedimentos diferentes e/ou locais diferentes dentre outros. No caso de instrumentos automatizados em que não há intervenção do operador no processo de medição, é usual considerar  $\sigma_{Repro}^2 = 0$ , e, neste caso, tem-se a seguinte igualdade:  $\sigma_{Med}^2 = \sigma_{Repet}^2$ . Porém, quando o instrumento de medição não é automatizado, a expressão para se estimar a variabilidade dos erros de reprodutibilidade é dada por:

$$\hat{\sigma}_{Repro}^2 = \left( \frac{R_{\bar{X}}}{d_2} \right)^2 - \frac{\hat{\sigma}_{Repet}^2}{nr} \quad (5)$$

em que  $R_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}}_{max} - \bar{\bar{X}}_{min}$ , sendo  $\bar{\bar{X}}_{max}$  e  $\bar{\bar{X}}_{min}$  o máximo e o mínimo valor, respectivamente, dos resultados médios obtidos pelos diversos operadores;  $r$  é o número de vezes em que cada operador mede um mesmo item;  $n$  é o número de itens medidos e  $d_2$

é como definido anteriormente. Eventualmente, o valor de  $\left( \frac{R_{\bar{X}}}{d_2} \right)^2 - \frac{\hat{\sigma}_{Repet}^2}{nr}$  poderá ser negativo. Quando isto ocorrer é costume adotar-se  $\sigma_{Repro}^2 = 0$ . Portanto a estimativa da variância do erro de medição de uma grandeza  $X_i$  é dada pela expressão:

$$\hat{\sigma}_{Med}^2 = \hat{\sigma}_{Repet}^2 + \hat{\sigma}_{Repro}^2 = \frac{\bar{R}}{d_2} + \left( \frac{R_{\bar{X}}}{d_2} \right)^2 - \frac{\hat{\sigma}_{Repet}^2}{nr} \quad (6)$$

A estimativa da variância do erro de medida dada pela expressão acima será utilizada neste artigo como a estimativa da variância dos erros  $\delta_i$  denotada por  $\sigma_{Med}^2$ .

### 3.2 A Geração dos erros de medidas no cotidiano de uma empresa

Como mencionado anteriormente, o conhecimento da variância do erro de medida da variável independente  $X_i$  denotada por  $\sigma_{Med}^2$ , faz com que o modelo de calibração funcional seja factível, isto é, torna possível estimar os demais parâmetros do modelo. Contudo, a prática tem mostrado que nem sempre é possível conhecer o valor desta variância, *a priori*. Mas, em se tratando de controle estatístico de processos, isto não é um problema tão sério assim, uma vez que as empresas que fazem uso dessa eficiente técnica estatística têm guardado em seus arquivos um histórico do processo de medição de seus

produtos, o que permite estimar a variabilidade das medidas. Infelizmente, existe uma grande parcela de empresas que não fazem o controle de qualidade de seus produtos e/ou serviços. Evidentemente, nesta situação, torna-se muito difícil a obtenção de uma estimativa da variância dos erros. O que se pretende nesta seção é apresentar ao leitor o mecanismo de formação dos erros de medidas inerentes a todo processo produtivo, e mostrar quão importante é para as empresas conhecer e controlar esses erros.

### **3.2.1. Erros decorrentes da falta de conformidade com o projeto**

Quando uma empresa decide lançar um novo produto no mercado ou então resolve ampliar seus negócios, oferecendo condições para produzir novos itens, ela reúne a alta gerência com objetivo de planejar e elaborar o projeto para fabricar esse(s) novo(s) produto(s). Uma vez realizado e aprovado o projeto, a empresa espera, então, que seus equipamentos, ou seja, seu processo seja capaz de fabricar esse(s) novo(s) itens com as mesmas especificações daquelas estabelecidas no projeto. Entretanto, mesmo que o processo seja capaz de fabricar o produto dentro das especificações desejadas, existirá sempre uma diferença entre as dimensões do produto manufaturado e as dimensões estabelecidas no projeto como consequência de causas aleatórias. Essas diferenças entre as dimensões do que se estabeleceram no projeto e as dimensões dos produtos finais geram uma variabilidade chamada de variabilidade real da característica. Essa variabilidade existe somente como consequência de causas aleatórias. A empresa muito, provavelmente, estará produzindo itens considerados não defeituosos, uma vez que variações decorrentes de causas aleatórias são aceitáveis. Se a variabilidade existe decorrente de outras causas consideradas como especiais, então, muito provavelmente haverá uma falta de conformidade do produto acabado com o projeto, significando, assim, que o processo não está sob controle estatístico.

Para tornar mais didático o conhecimento dessa variabilidade natural, será mostrado um exemplo de como surge essa variação, e como é importante para uma empresa deter o conhecimento de sua magnitude.

Suponha que uma montadora de veículos de passeio resolva contratar uma empresa de fundição de metais para produzir blocos de motores para certo tipo de carro. A montadora, ao receber os blocos encomendados, fica muito satisfeita com a qualidade destes e resolve contratar, também junto a essa mesma empresa, outras peças que compõem o motor do veículo, tal como o pistão. Nesse caso, a montadora repassa para a empresa contratada quais são as medidas exatas das características do diâmetro e do comprimento do pistão, deixando estabelecido em contrato uma pequena margem de erro, segundo a qual os pistões ainda serão considerados como sendo sem defeitos. A empresa começa produzir os pistões, e para garantir a qualidade destes, o gerente responsável pela produção seleciona diariamente uma amostra aleatória de 4 pistões e utiliza funcionários muito bem treinados e equipamentos de alta precisão para executar as medições. Ao realizar as medições, o gerente percebe que a partir da primeira amostra selecionada, nenhuma peça teve o seu comprimento e o seu diâmetro igual ao valor exigido pela montadora, ou seja, existe um erro entre o que se estipulou no contrato e o que se está produzindo. Entretanto, o gerente constatou, também, que, em média, as medidas de cada característica não ultrapassaram a margem de erro estipulada no contrato. Está claro que se a empresa consegue produzir os pistões, respeitando as exigências de contrato, então, as variações existentes em cada peça são decorrentes somente de causas aleatórias e não

caracteriza falta de conformidade de projeto. Com isso, a empresa produtora dos pistões consegue acumular, ao longo do tempo, uma grande quantidade de dados sobre o comprimento e o diâmetro dos pistões, o que permitirá à empresa contratante, no caso, a montadora, fazer uma auditoria no processo de produção, a qualquer momento, desde que isto esteja também estabelecido em contrato. Além disso, com essa amostra de tamanho 4, o gerente consegue estimar facilmente a média e a variância de cada característica de modo que, ao final de algum tempo, ele passe a deter com muita precisão qual a variação média existente tanto para o diâmetro quanto para o comprimento dos pistões, que ainda assim, eles serão considerados não defeituosos. Este é um exemplo bem simples de como os erros de medida surgem no cotidiano de uma empresa.

Mas qual a vantagem para a empresa em deter o conhecimento dessa variação média? A resposta é muito simples. O gerente da empresa pode estabelecer que a variabilidade máxima permitida na fabricação das peças (pistões) seja justamente essa variação média. Assim, se em um determinado dia a amostra selecionada proporcionar uma variação que ultrapasse aquela estipulada pela empresa, então é sinal de que alguma causa especial está interferindo no processo e o gerente responsável pela produção pode rapidamente descobrir quais são essas causas. Em outras palavras, o controle do processo, pelo menos no que diz respeito à variabilidade das medidas do diâmetro e do comprimento, pode ser feito através desse máximo valor instituído pela empresa. Isto pode ser realizado da seguinte forma: se as amostras selecionadas aleatoriamente fornecerem uma variância menor ou igual a que se está utilizando como valor máximo permitido, considere o processo sob controle estatístico, e caso contrário, o processo precisa ser examinado cuidadosamente.

### **3.2.2. Erros decorrentes do processo de medição física**

Os erros decorrentes de processos de medições físicas já foram apresentados anteriormente e se dividem em duas categorias: os erros de reprodutibilidade e os erros de repetibilidade. Qualquer que seja a categoria desses erros é muito importante conhecer sua magnitude e o seu processo de formação lá no chão da fábrica. Isto porque uma vez que se conhece sua magnitude e a forma como se originam torna-se mais fácil exercer maior controle sobre eles, proporcionando, assim, uma melhoria na qualidade final dos produtos.

Como discutido na seção (3.1), os erros de repetibilidade são definidos como sendo o grau de concordância entre resultados de medições sucessivas de um mesmo mensurando sob as mesmas condições de medição. Mas como isto acontece no cotidiano de uma empresa? Como o gerente responsável pelo processo produtivo de uma fábrica toma conhecimento desses erros? Em outras palavras, como se originam esses erros quando se está produzindo um disco de freio de uma moto, por exemplo? Isto acontece da seguinte maneira: imagine uma fábrica que produz discos de freio para uma categoria de motocicleta. Certamente que uma das características da qualidade a ser monitorada pela empresa diz respeito à espessura do disco de freio. O procedimento definido e implantado do controle de qualidade sobre amostragem, da empresa estabelece que, de hora em hora, um disco deva ser selecionado ao acaso, e suas medidas tomadas três vezes por um mesmo operador muito bem treinado, utilizando o mesmo instrumento de medida sob as mesmas condições, no mesmo local de medição, utilizando o mesmo procedimento, e fazendo-se isto num curto intervalo de tempo. Nestas circunstâncias, é de se esperar que o

operador encontre três valores iguais para a espessura do disco. Mas, infelizmente, isto nem sempre acontece, e é muito comum numa situação como esta a obtenção de três resultados diferentes. Esses resultados diferentes, obtidos nessas condições, são os chamados erros de repetibilidade. Este é um exemplo bem simples que se pode utilizar para mostrar como surgem os erros de medidas devido à repetibilidade em um processo produtivo.

Como quantificar a magnitude da variação dessas medidas? Nesse caso particular, uma forma bem simples de quantificar a variação das medidas é através do cálculo da amplitude amostral, que consiste em tomar a diferença entre o maior e o menor valor observado. Ou seja, o desvio padrão de um subgrupo racional que, neste caso, consiste das três medições de cada disco, pode ser estimado pela amplitude amostral dessas medidas, e o desvio padrão total pode ser estimado tomando a raiz quadrada da expressão (4).

A outra categoria de erros denominada reprodutibilidade é definida como o grau de concordância entre os resultados das medições de um mesmo mensurando e efetuadas sob condições variadas de medição. Mas como é o processo de formação desses erros no interior de uma fábrica? Para ver como esses erros aparecem num processo produtivo, basta voltar ao exemplo anterior. Só que agora a empresa estabelece que cada disco selecionado de hora em hora deve ter sua espessura mensurada por três operadores diferentes. Mas acontece que esses operadores trabalham em ambientes diferentes, distante uns dos outros, pois a empresa deseja, também, avaliar a qualidade de trabalho desses medidores. Além disso, cada medidor utiliza seu próprio instrumento de medida de modo que cada um deles trabalhe com instrumentos diferentes. Nestas circunstâncias, é muito provável que as três medidas da espessura de um mesmo disco sejam diferentes uma da outra, introduzindo, assim, os chamados erros de reprodutibilidade na linha de produção. Após algum período de tempo, a empresa terá em seus registros uma grande quantidade de dados referentes a esse processo de medição. Nesse caso, se em um mesmo disco houver medidas muito discrepantes, então, o responsável pelo processo terá que verificar uma quantidade razoável de itens tais como: a perícia do operador, a qualidade do instrumento utilizado por eles, à matéria prima utilizada para fabricar aquele disco, dentre outras.

Como quantificar a magnitude da variação dessas medidas? Uma forma muito utilizada para quantificar a variação dessas medidas é através da expressão (5). Ou seja, o desvio padrão das três medições de cada disco pode ser estimado pela amplitude amostral dessas medidas e a estimação do desvio padrão total leva em consideração a quantidade de peças mensuradas e o número de vezes que cada uma delas é medida por cada um dos operadores. Se a empresa for realmente organizada, ela terá em seus arquivos a variabilidade média das medições de cada um dos operadores, de modo que ela possa confrontar esses resultados como uma forma de avaliação da capacidade de seus funcionários. Em procedimentos desta natureza, a variabilidade encontrada é decorrente tão somente do processo de medição e está sempre presente num processo produtivo que adote este tipo de controle da qualidade de seus produtos.

### **3.3 O modelo de calibração funcional e suas propriedades**

Nesta seção será apresentado o modelo de calibração funcional e as propriedades dos estimadores dos parâmetros envolvidos nele.



Como na segunda etapa do problema de calibração, faz-se necessário extrair uma amostra aleatória de tamanho  $k(k \geq 1)$  da variável aleatória  $Y_i$  correspondente a um único valor de  $U_i$  desconhecido, então o modelo de calibração com erros nas variáveis, pode ser definido como:

$$\begin{aligned} Y_i &= \alpha + \beta U_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ X_i &= U_i + \delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ Y_{0i} &= \alpha + \beta U_0 + \varepsilon_{0i}, \quad i = n+1, \dots, n+k, \end{aligned} \quad (7)$$

em que  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{0n+1}, \dots, \varepsilon_{0n+k}$  são mutuamente independentes e identicamente distribuídos com média zero e variância  $\sigma_\varepsilon^2$ . É assumido também que as quantidades  $\delta_1, \dots, \delta_n$  são mutuamente independentes e identicamente distribuídas com média zero e variância constante  $\sigma_{Med}^2$ .

O modelo de calibração funcional é amplamente conhecido na literatura estatística, e caracteriza-se essencialmente, pelo fato das quantidades  $U_i, i = 1, 2, \dots, n$ , no modelo (7) serem consideradas como constantes fixas. Ou seja, o modelo de calibração funcional é um modelo como definido em (7), que considera a variável independente como sendo constantes fixas ou variáveis controladas, desprovidas de algum tipo de distribuição de probabilidade. Infelizmente, este modelo tão importante e com uma vasta aplicabilidade não tem sido explorado nas áreas de tecnologias tais como as engenharias, principalmente na engenharia de produção, onde se encontra muitas situações em que tal modelo poderia ser aplicado com êxito. Há que se perceber que nesse modelo, o número de parâmetros cresce com o tamanho da amostra  $n$  e os  $(n+4)$  parâmetros do modelo são:  $\alpha, \beta, \sigma_\varepsilon^2, \sigma_{Med}^2, U_1, \dots, U_n$ , onde  $\alpha, \beta, \sigma_\varepsilon^2, \sigma_{Med}^2$  são conhecidos como parâmetros estruturais do modelo e os  $n$  últimos são chamados de parâmetros de incidentais.

### 3.2.3. Propriedades do estimador de $U_0$ no modelo funcional de calibração

Conforme descrito em Lima (1996), quando se conhece a variância  $\sigma_{Med}^2$  no modelo (7), tem-se que os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  não são consistentes e nem podem ser obtidos de forma explícita.

Também não se conhecem, neste caso, as expressões das variâncias assintóticas dos estimadores de máxima verossimilhança. A inconsistência desses estimadores no modelo de regressão funcional transporta-se automaticamente para o modelo de calibração funcional. Porém, isto não significa que não se podem obter estimadores consistentes para tais parâmetros no modelo de calibração funcional. Segundo Cheng e Van Ness (1991) obtêm-se estimadores consistentes para os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  no modelo de calibração funcional, tomando-se os estimadores obtidos pelo método dos momentos no modelo estrutural e estudando seu comportamento no modelo funcional. Utilizando esse fato e conhecendo-se a variância  $\sigma_{Med}^2$  obtêm-se, então, os estimadores consistentes no modelo de calibração funcional. Segundo o modelo (7) observa-se que:

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix} \sim N_2 \left( \begin{pmatrix} U_i \\ \alpha + \beta U_i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \sigma_{Med}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix} \right), i = 1, \dots, n, \text{ e} \quad (8)$$

$$Y_{0i} \sim N(\alpha + \beta U_{0i}; \sigma_{0\varepsilon}^2), i = n+1, \dots, n+k,$$

com  $(X_i, Y_i, Y_{0i})$  mutuamente independentes, em que  $X_i = (X_1, \dots, X_n)$ ,  $Y_i = (Y_1, \dots, Y_n)$  e  $Y_{0i} = (Y_{0n+1}, \dots, Y_{0n+k})$ , conforme definido, anteriormente. Os estimadores consistentes para os parâmetros do modelo (7) são obtidos considerando, inicialmente, o modelo estrutural. Suponha-se, também, que a variância dos erros de medida  $\sigma_{Med}^2$  seja conhecida e que  $U_i \sim N(\mu_u, \sigma_u^2)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Com base nessas suposições, pode-se mostrar que os momentos populacionais de  $(X_i, Y_i, Y_{0i})$ , segundo Lima (1996), satisfazem as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} (\sigma_X^2, \sigma_Y^2, \sigma_{Y_0}^2, \sigma_{XY}, \sigma_{XY_0}, \sigma_{Y_0}) &= (\sigma_u^2 + \sigma_{Med}^2, \beta^2 \sigma_u^2 + \sigma_\varepsilon^2, \sigma_\varepsilon^2, \beta \sigma_u^2, 0, 0) \\ (\mu_X, \mu_Y, \mu_{Y_0}) &= (\mu, \alpha + \beta \mu, \alpha + \beta U_0). \end{aligned}$$

Substituindo os momentos populacionais pelos seus momentos amostrais no lado esquerdo das igualdades acima, obtém-se um sistema de equações que, depois de resolvido, fornece os estimadores dos parâmetros desconhecidos, que são:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_C &= \bar{Y} - \hat{\beta}_C \bar{X}, \\ \hat{\beta}_C &= \frac{S_{xy}}{S_{xx} - \sigma_{Med}^2}, \\ \hat{\sigma}_\varepsilon^2 &= \frac{1}{2}(S_{yy} + S_{y_0y_0} - \hat{\beta}_C S_{xy}), \\ \hat{\sigma}_u^2 &= S_{xx} - \sigma_{Med}^2, \text{ e} \\ \hat{U}_{0C} &= \frac{\bar{Y}_0 - \hat{\alpha}_C}{\hat{\beta}_C}, \hat{\beta}_C \neq 0, \end{aligned} \quad (9)$$

em que  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Y}_0, S_{xx}, S_{xy}, S_{yy}$  são como definidos anteriormente e

$S_{y_0y_0} = \frac{1}{k} \sum_{i=n+1}^{n+k} (Y_{0i} - \bar{Y}_0)^2$ . Nota-se que os estimadores definidos em (9) somente pertencerão ao espaço paramétrico se  $\hat{\sigma}_u^2$  e  $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$  forem positivos. Esses estimadores serão positivos se e somente se  $(S_{yy} + S_{y_0y_0})(S_{xx} - \sigma_{Med}^2) - S_{xy}^2 > 0$ . Ou seja, se  $S_{xx} > \sigma_{Med}^2$  e  $S_{yy} + S_{y_0y_0} > \frac{S_{xy}^2}{S_{xx} - \sigma_{Med}^2}$ . Assintoticamente não existe nenhuma restrição, pois o estimador

$\hat{\sigma}_u^2$  converge em probabilidade para o parâmetro  $\sigma_u^2$  e o estimador  $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$  também converge em probabilidade para o parâmetro  $\sigma_\varepsilon^2$  (Lima, 1996).

Observe-se que os estimadores  $\hat{\alpha}_C$  e  $\hat{\beta}_C$  só dependem da primeira etapa do experimento de calibração, isto é, só dependem das  $n$  observações de  $X_i$  e  $Y_i$ . Lima (1996) demonstrou, ainda, que os estimadores  $\hat{\alpha}_C$ ,  $\hat{\beta}_C$ ,  $\hat{U}_{0C}$  e  $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$  definidos em (9) são estimadores fortemente consistentes, e que o valor esperado do estimador de  $U_0$  é dado pela seguinte expressão:

$$E(\hat{U}_{0C}) = U_0 + \frac{(U_0 - \bar{U})}{n\sigma_{Med}^2\beta_C^2 l} \left[ \frac{\sigma_\varepsilon^2(1+l)}{l} - 2\beta_C^2\sigma_{Med}^2 \right] + O(n^{-2}), \text{ onde } l = \frac{\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2}{n\sigma_{Med}^2}$$

Claramente pode-se notar que  $\hat{U}_{0C}$  é um estimador viesado, mas que assintoticamente isto não acontece, uma vez que  $\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{U}_{0C}) = U_0$ . Nota-se, também, que este estimador é não viesado quando  $U_0 = \bar{U}$ , e que o viés pode ser bem pequeno para valores de  $U_0$  próximos a  $\bar{U}$ . Para os propósitos de estudo, nesta tese, não será utilizado o estimador inverso, uma vez que tal estimador, além de ser viesado, é, também, um estimador inconsistente.

### 3.3.2. Estimador da variância de $\hat{U}_{0C}$

Inicialmente se faz necessário ressaltar que o modelo de calibração funcional se dá em duas etapas em que a primeira etapa, também chamada de experimento de calibração, nada mais é do que um modelo funcional de regressão. Portanto, toda a teoria desenvolvida sobre o modelo de regressão funcional continua válida para o modelo de calibração funcional. Considere-se o modelo de calibração definido pelas equações (7) com média e variância definidas por (8) e o modelo estimado dado pela seguinte expressão:

$$\hat{U}_{0C} = \frac{\bar{Y}_0 - \hat{\alpha}_C}{\hat{\beta}_C}, \hat{\beta}_C \neq 0$$

Aplicando-se a variância em ambos os lados da igualdade acima, e após alguma manipulação algébrica, como pode ser constatado em Lima (1996), obtém-se o estimador da variância assintótica de  $\hat{U}_{0C}$ , dado pela expressão:

$$\hat{Var}(\hat{U}_{0C}) = \frac{\hat{\phi}}{n\hat{\beta}_C^2} + \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{k\hat{\beta}_C^2} + \frac{3\hat{\sigma}_\varepsilon^4(1+l)}{nk\hat{\beta}_C^4 l^2 \sigma_{Med}^2} + \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2(2-3l)}{nk\hat{\beta}_C^2 l^2} + \frac{(U_0 - \bar{U})^2 \Phi}{n\hat{\beta}_C^2 l^2 \sigma_{Med}^2} + O(n^{-2})$$

onde  $l$  é como definido anteriormente,  $\hat{\phi} = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 + \hat{\beta}_C^2 \sigma_{Med}^2$ ,  $\Phi = [\hat{\sigma}_\varepsilon^2(1+l) + \hat{\beta}_C^2 \sigma_{Med}^2(2+l)]$  e  $k$  é o número de observações na segunda etapa de calibração. Desprezando-se os erros

de segunda ordem, isto é,  $n^{-2}$  e trabalhando-se apenas com valores aproximados até os termos de primeira ordem, tem-se:

$$\hat{Var}(\hat{U}_{0C}) = \frac{\hat{\phi}}{n\hat{\beta}_C^2} + \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{k\hat{\beta}_C^2} + \frac{3\hat{\sigma}_\varepsilon^4(1+l)}{nk\hat{\beta}_C^4 l^2 \sigma_{Med}^2} + \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2(2-3l)}{nk\hat{\beta}_C^2 l^2} + \frac{(U_0 - \bar{U})^2 \Gamma}{n\hat{\beta}_C^2 l^2 \sigma_{Med}^2}, \quad (10)$$

em que  $\Gamma = [\hat{\sigma}_\varepsilon^2(1+l) + \hat{\beta}_C^2 \sigma_{Med}^2(2+l)]$  e  $\hat{U}_{0C}$  é o estimador clássico consistente de  $U_0$ .

### 3.3.3. Erro padrão da reta de calibração funcional normal

O processo utilizado para obter o erro padrão da reta de calibração funcional é semelhante ao processo utilizado para obter o erro padrão de um conjunto de dados de uma determinada variável digamos  $Y_i$ . Quando se tratar de uma variável, a variação amostral se dá entre cada ponto observado e a média da variável. Porém, quando se tratar de uma relação entre variáveis como, por exemplo, o modelo de calibração funcional, a variação se dá entre cada ponto observado e a reta de calibração ajustada. Em outras palavras, o desvio padrão do estimador dos verdadeiros valores de  $X_i$  no modelo de calibração funcional, passa a ser o afastamento médio e mínimo, existente entre cada ponto observado e a reta estimada. Esse desvio padrão será chamado de erro padrão, e seu estimador é, simplesmente, a raiz quadrada positiva da expressão definida em (10), ou seja:

$$\hat{EP}(\hat{U}_{0C}) = \sqrt{\hat{Var}(\hat{U}_{0C})} \quad (11)$$

É importante observar que a equação de regressão obtida no experimento de calibração é estimada a partir de um conjunto de  $n$  observações das variáveis  $X_i$  e  $Y_i$ , de modo que a variância da reta ajustada representa uma medida do erro, segundo a qual qualquer valor de  $U_0$  pode ser estimado a partir de um valor observado  $Y_0$ .

### 3.3.4. Intervalos de confiança assintóticos para os parâmetros do modelo

Este é um assunto que ainda não tem sido explorado em modelos com erros nas variáveis e, principalmente, em modelos de calibração. Porém, utilizando as estimativas consistentes dos parâmetros do modelo de calibração, que são estimadores com distribuições assintoticamente normais, pode-se construir os intervalos de confiança assintóticos para os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ . Para construir esses intervalos de confiança assintóticos, segundo Cheng & Van Ness (1994 e 1999), é necessário somente o conhecimento da probabilidade de cobertura  $100(1-\theta)\%$  e da largura  $z$  esperada do intervalo. Assim, os intervalos de confiança assintóticos para os parâmetros do modelo podem ser escritos como:

$$P[\hat{\alpha}_C - (t_{\frac{\theta}{2}, n-2}) \hat{EP}(\hat{\alpha}_C) \leq \alpha \leq \hat{\alpha}_C + (t_{\frac{\theta}{2}, n-2}) \hat{EP}(\hat{\alpha}_C)] = 1 - \theta, \text{ e}$$

$$P[\hat{\beta}_C - (t_{\frac{\theta}{2}, n-2})\hat{EP}(\hat{\beta}_C) \leq \beta \leq \hat{\beta}_C + (t_{\frac{\theta}{2}, n-2})\hat{EP}(\hat{\beta}_C)] = 1 - \theta,$$

em que o erro padrão de  $\hat{\alpha}_C$  e  $\hat{\beta}_C$  é dado pela raiz quadrada positiva da variância desses estimadores, que são:

$$\hat{EP}(\hat{\alpha}_C) = \sqrt{\frac{\hat{\phi}}{n} + \frac{\bar{U}^2 \{[\sigma_{Med}^2(1+l)]\hat{\phi} + \hat{\beta}_C^2 \sigma_{Med}^4\}}{n\sigma_{Med}^4 l^2}}; \hat{EP}(\hat{\beta}_C) = \sqrt{\frac{[\sigma_{Med}^2(1+l)]\hat{\phi} + \hat{\beta}_C^2 \sigma_{Med}^4}{n\sigma_{Med}^4 l^2}}. \quad (12)$$

### 3.3.5. Intervalo de confiança assintótico para valores preditos

Considere-se inicialmente uma situação cujo objetivo é estimar um determinado valor de uma variável  $Y_i$  correspondente a um determinado valor  $X_i$ . Neste caso, o valor estimado de  $Y_i$  pode ser representado pela expressão:

$$\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i. \quad (13)$$

Porém, existe outra situação para se fazer estimação, que deve ser diferenciada dessa. É a situação na qual um valor da variável independente  $X_0$  representa um novo valor ou uma nova observação de  $X_i$  correspondente a uma observação adicional ou futura  $Y_0$  de  $Y_i$ . Naturalmente, o valor predito de  $X_0$  pode pertencer ou não ao conjunto de dados que foram utilizados para estimar a reta de regressão e, portanto, pode ser obtido através da expressão dada em (13). A diferença fundamental entre as duas situações é o erro padrão do valor estimado e, conseqüentemente, a largura do intervalo de confiança. Na primeira situação, constata-se que o estimador do erro padrão é dado pela expressão:

$$S_{\hat{Y}_i} = S \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}}. \quad (14)$$

Na segunda situação, o valor do erro padrão é semelhante ao anterior, embora a previsão futura seja mais imprecisa. Dessa forma, a inclusão de uma variação adicional  $S^2$  é realizada ao estimador do erro padrão. Neste caso, segundo Ferreira (2005), o estimador do erro padrão para uma nova observação  $X_0$  é dado por:

$$S_{\hat{Y}_0} = S \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}}. \quad (15)$$

Observando as expressões (14) e (15), pode-se notar, claramente, a justificativa dada por Mandel (1969) de que é sempre possível construir limites de controle, paralelos quando a variação sobre a reta de regressão não for muito grande. A última parcela dentro do radical na expressão (15), por exemplo, depende dos afastamentos ou desvios nos valores da variável independente. Desde que esses desvios sejam pequenos, a contribuição

dessa parcela na formação do valor do erro padrão torna-se praticamente desprezível, de modo que o valor final do erro padrão seja majorado pelos valores das outras parcelas e pelo valor do desvio padrão amostral  $S$ . Assim, o erro padrão da reta ajustada cresce ou decresce de forma praticamente constante, de modo que para qualquer valor dentro do conjunto de cobertura, a distância entre a linha central e os limites de controle seja fixa. Quando a variação for grande, então, a última parcela dentro do radical na expressão (15) passa a ter uma contribuição maior na formação do valor final do erro padrão e, conseqüentemente, aqueles valores mais afastados do centro da distribuição dos dados produzirão um erro padrão maior. Dessa forma, os valores mais centrais produzem uma distância menor entre os limites de controle e a linha central e, aqueles valores mais afastados do centro produzem limites de controle mais distantes da linha central, fazendo com que os limites não sejam paralelos.

Com os resultados apresentados nas expressões (14) e (15), pode-se construir o intervalo de confiança para um valor predito de  $Y_i$  dado uma observação  $X_i$  e o intervalo de confiança para um valor predito futuro de  $Y_0$  dada uma observação de um valor futuro  $X_0$  tendo como base a distribuição  $t$  de Gosset, que são:

$$\begin{aligned} IC_{(1-\theta)}(Y_i) : \hat{Y}_i \pm t_{(\frac{\theta}{2}, n-2)} S_{\hat{Y}_i} &= \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i \pm t_{(\frac{\theta}{2}, n-2)} S_{\hat{Y}_i} \\ IC_{(1-\theta)}(Y_0) : \hat{Y}_0 \pm t_{(\frac{\theta}{2}, n-2)} S_{\hat{Y}_0} &= \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_0 \pm t_{(\frac{\theta}{2}, n-2)} S_{\hat{Y}_0} \end{aligned} \quad (16)$$

Um intervalo de confiança para a predição inversa, isto é, para o modelo de calibração não é derivado de forma tão trivial como os intervalos de confiança deduzidos para o modelo de regressão simples conforme descrito em Zar (1996). Além disso, Zar relata, também, que, no caso da regressão simples, os limites dos intervalos de confiança são simétricos em torno  $Y_i$ , mas que o mesmo não ocorre com os limites para a predição de  $\hat{X}_i$ . Utilizando a mesma notação definida em (9), Zar apresenta um intervalo de confiança para um valor predito da variável independente  $\hat{X}_i$  o qual é dado pela expressão:

$$IC_{(1-\theta)}(\hat{X}_i) : \bar{X} + \frac{\hat{\beta}(Y_i - \bar{Y})}{K} \pm \frac{t_{(\frac{\theta}{2}, n-2)}}{K} \sqrt{S^2 \left[ \frac{(Y_i - \bar{Y})^2}{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2} + K \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right]}, \quad (17)$$

em que  $K = \hat{\beta}^2 - t_{(\frac{\theta}{2}, n-2)}^2 S_{\hat{\beta}}^2$ .

### 3.3.6. Modelo de previsão para novas observações

Uma das mais importantes aplicações de um modelo de regressão é justamente fazer previsões para novas ou futuras observações. No caso do modelo de calibração isto não é diferente, uma vez que um modelo de calibração nada mais é do que um modelo de regressão, denominado regressão inversa. Como definido em (9), a estimativa de um novo ou futuro valor da variável resposta para um modelo de calibração é dada por:

$$\hat{X}_{0c} = \frac{Y_0 - \hat{\alpha}_c}{\hat{\beta}_c}. \quad (18)$$

Suponha-se agora, que o interesse de um pesquisador consiste em obter uma estimativa do intervalo para essa nova ou futura observação chamada de  $U_0$ . Essa observação é independente das observações que foram utilizadas para ajustar o modelo e, conseqüentemente, o intervalo de confiança definido por (17) não é adequado, pois ele foi obtido somente com os dados utilizados para estimar a curva de calibração. Ou seja, o intervalo de confiança em torno de  $\hat{X}_i$  refere-se à resposta média verdadeira em  $Y_i = Y_0$  e não às futuras observações. Considerando  $U_0$  como sendo uma observação futura correspondente a um valor de  $Y_i = Y_0$  e fazendo com que  $\hat{U}_{0c}$  seja seu estimador, tem-se, então, o erro de previsão que é dado por:

$$\hat{Var}(\psi) = Var(U_0 - \hat{U}_{0c}) = Var(U_0) + Var(\hat{U}_{0c}) - 2Cov(U_0, \hat{U}_{0c})$$

em que  $\Psi$  é uma variável aleatória, distribuída normalmente com média zero e variância estimada dada pela expressão:

Nota-se que a estimativa da variância de  $\Psi$  coincide com a estimativa da variância de  $\hat{U}_{0c}$  pelo fato de  $U_0$  ser considerada uma constante fixa e não uma variável aleatória, isto é:

$$\hat{Var}(\psi) = Var(U_0 - \hat{U}_{0c}) = Var(\hat{U}_{0c}).$$

Observa-se, também, que  $\hat{U}_{0c}$  é uma previsão não viesada para  $U_0$ , uma vez que, por definição, a esperança do erro de previsão num modelo de regressão deve ser nula. Assim, o modelo de previsão para novas ou futuras observações será obtido, utilizando-se da expressão da variância de  $\hat{U}_{0c}$  dada por (10). Conclui-se que uma boa parte dos resultados, até aqui apresentados, já são de conhecimento público e encontram-se demonstrados em (Lima, 1996). Entretanto, o gráfico de controle, utilizando esses resultados, isto é, utilizando o modelo de calibração funcional com a suposição de que a variância dos erros de medida na variável independente seja conhecida, é algo inédito e será apresentado a seguir.

### 3.4 Gráfico de controle de calibração com a variância dos erros conhecida

A construção do gráfico de controle utilizando o modelo de calibração funcional pode constituir-se numa ferramenta muito eficiente na análise do relacionamento entre duas características da qualidade, principalmente se esse relacionamento for linear e do tipo causa e efeito. A ideia principal, nesse caso, é exercer o controle estatístico sobre as duas características da qualidade, simultaneamente. No caso específico do modelo de calibração, além do interesse em controlar a relação entre duas variáveis, pode-se desejar, também, fazer previsões para novas ou futuras observações. Este tipo de gráfico de controle não é tão simples de ser construído e, principalmente, de ser interpretado como os gráficos de controle por variáveis ou atributos introduzidos por Shewhart. Uma interpretação equivocada do relacionamento entre variáveis do tipo causa e efeito, certamente levará o gerente de qualidade a tomar decisões equivocadas, colocando em

risco a estabilidade do processo e, conseqüentemente, gerando gastos desnecessários para a empresa.

Os elementos necessários para construir o gráfico de controle, utilizando o modelo de calibração funcional, são análogos aos que se utilizam para construir os gráficos de controle para variáveis. Ou seja, a linha média, também chamada de linha central do gráfico de controle, será representada, aqui, pela equação ajustada da curva de calibração, e os limites, inferior e superior de controle são construídos, tendo como base o erro padrão da equação ajustada. Como já é conhecida na literatura e, também, na prática, a média do processo pode variar em quantidades múltiplas do desvio padrão, isto é,  $\bar{X} \pm 3\sigma$ ,  $\bar{X} \pm 3,3\sigma$ , e assim por diante. Portanto, os limites, inferior e superior de controle podem ser construídos distantes da linha central conforme o interesse e a necessidade do gerente do processo. Assim, se o objetivo for somente o de construir um gráfico de controle, utilizando o modelo de calibração ajustado para se fazer o monitoramento do processo, então, os elementos necessários para construir o gráfico de controle podem ser expressos pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned}
 \text{Limite Superior de Controle : } LSC_{\hat{U}_0} &= \hat{U}_{0C} + q \times \hat{EP}(\hat{U}_{0C}), \\
 \text{Linha Média ou Central : } LM_{\hat{U}_0} &= \hat{U}_{0C} = \frac{\bar{Y}_0 - \hat{\alpha}_C}{\hat{\beta}_C}, \\
 \text{Limite Inferior de Controle : } LIC_{\hat{U}_0} &= \hat{U}_{0C} - q \times \hat{EP}(\hat{U}_{0C}),
 \end{aligned} \tag{19}$$

em que o  $\hat{EP}(\hat{U}_{0C})$  é dado pela equação (11).

Porém, se o processo estiver sob controle estatístico, então, o gerente de processo pode utilizar os mesmos limites de controle dados em (19) como o modelo de previsão, ou seja, o gerente pode utilizar o mesmo gráfico de controle tanto para monitoramento do processo quanto para controlar a previsão de uma nova ou futura observação das variáveis. Na expressão (19)  $q$  é a quantidade de desvios padrão, e seus valores dependerão das necessidades ou do interesse de se ter limites de controle mais largos ou mais estreitos. Por exemplo, se for utilizado o valor  $q = 2$  obtêm-se limites de controle mais estreitos, e, nesse caso, o número de alarmes falsos tendem a ser elevados. Por outro lado, os limites de controle, utilizando-se  $q = 3$ , são mais largos, e, por isso, a probabilidade de alarmes falsos tende a ser menor, o que é sempre desejável num processo. Vale ressaltar, aqui, também, que tanto a linha central do gráfico quanto os limites inferior e superior de controle fornecerão resultados assintóticos, isto é, estes elementos sempre terão um erro de segunda ordem em seu processo de estimação.

### 3.4. Exemplo de aplicação

O objetivo de se introduzir este exemplo é mostrar o formato do gráfico de controle, utilizando o modelo de calibração funcional, considerando as duas situações, isto é, o gráfico de controle construído para monitorar o processo e o gráfico de controle construído para se fazer previsão de uma observação futura. Os dados utilizados neste exemplo é uma adaptação de um problema que se encontra no livro do Montgomery e Runger (2003), e referem-se às grandezas: desgaste abrasivo do aço doce e a viscosidade



do óleo. Os autores consideraram o volume desgastado do aço ( $10^{-4} mm^3$ ) como sendo uma função linear da viscosidade do óleo. Os valores da grandeza da viscosidade do óleo  $X_i$  e da grandeza do volume desgastado do aço  $Y_i$  mostrados na Tabela 1 correspondem à média de duas medidas realizadas para cada uma das 14 observações. A amplitude amostral  $R$  entre as duas medidas de cada observação da viscosidade, mostradas na terceira coluna da Tabela 1, representa uma estimativa dos erros de medidas  $\delta_i$ .

Tabela 1 - Dados sobre viscosidade e volume desgastado

Observação	Viscosidade ( $X_i$ )	Volume Desgastado ( $Y_i$ )	$\bar{R}$
1	1,70	240,50	0,2
2	9,20	180,50	0,4
3	15,35	193,25	0,3
4	20,25	154,75	0,5
5	22,20	172,50	0,4
6	35,65	110,25	0,3
7	43,10	112,50	0,2
8	40,70	74,50	0,4
9	32,90	93,50	0,2
10	44,55	72,00	0,1
11	43,70	68,50	0,2
12	25,15	196,40	0,3
13	30,75	116,60	0,5
14	14,10	140,50	0,2

Fonte: Montgomery e Runger - Adaptação nossa.

Os valores das estimativas dos parâmetros necessários à construção do gráfico de controle, utilizando o modelo de calibração linear funcional, estão dispostos no Quadro 1. Além disso, o Quadro 1 também mostra que as estimativas dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  são significativamente diferentes de zero, uma vez que, com um nível de confiança igual a 99%, os valores da estatística  $t$  obtida para cada estimador são maiores do que 2 (em valores absolutos) com  $p$ -valor bem menor que 0,01.

Com os dados apresentados no Quadro 1 pode-se estabelecer a curva de calibração funcional a qual será utilizada como a linha central do gráfico de controle

sendo dada por: 
$$\hat{U}_{0C} = \frac{\bar{Y}_0 - 223,8535}{-3,1814}$$

A Figura 1 ilustra o formato do gráfico de controle quando se utiliza o modelo de calibração linear funcional. Como a variância de  $\delta_i$  não era conhecida, ela foi estimada através da média das amplitudes amostrais, na qual a estimativa obtida foi igual a  $\bar{R} = \hat{\sigma}_{Med}^2 = 0,3077$ .

Na Figura 1, observa-se que as linhas pontilhadas são os limites, inferior e superior de controle, construídos tanto para monitoramento do processo quanto para o modelo de previsão.

Quadro 1 – Estatísticas obtidas a partir dos dados da Tabela 1, com  $\hat{\sigma}_{Med}^2 = 0,3077$

Nomes	Descrição	Valor Obtido
$N$	Número de pares de observações	14
$K$	Nº de observações na segunda etapa de calibração	1
$\bar{X}$	Média amostral de $X_i$	27,0929
$\bar{Y}$	Média amostral de $Y_i$	137,6607
$\hat{\alpha}_c$	Estimativa do coeficiente linear ou intercepto	223,8535
$\hat{\beta}_c$	Estimativa do coeficiente angular da reta	-3,1814
$\hat{\sigma}_\varepsilon^2$	Estimativa da variância dos erros $\varepsilon$	4,48E+02
$\hat{\sigma}_u^2$	Estimativa da variância de $U_i$	191,1119
$L$	Erro quadrático médio de $U_i$	976,0344
$\hat{\phi}$	Soma das estimativas de $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ com $\hat{\beta}_c \sigma_s^2$	450,7855
$EP(\hat{\alpha}_c)$	Erro padrão do estimador $\hat{\alpha}_c$	10,5347
	$t$ de alfa = 21,2492	$P$ -valor = 0,0000
$EP(\hat{\beta}_c)$	Erro padrão do estimador $\hat{\beta}_c$	0,327608
	$t$ de beta = -9,7110	$P$ -valor = 0,0000

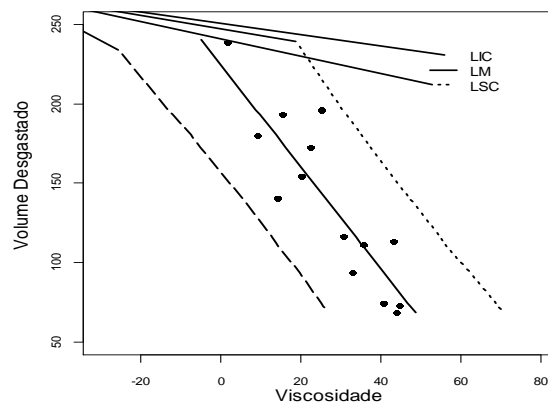


Figura 1 - Gráfico de controle da viscosidade e volume desgastado utilizando o modelo de calibração funcional com limites 3 sigmas.

Observe que a exemplo dos gráficos de controle de regressão, o gráfico de controle utilizando o modelo de calibração funcional também apresenta a linha central inclinada, seguindo a nuvem de pontos do diagrama de dispersão. Porém, ao contrário do gráfico de controle de regressão que apresenta os limites de controle paralelo à linha central, aqui os limites de controle são curvados de modo que a região de controle é mais estreita no centro da distribuição dos dados e mais larga nas extremidades. Como pode ser observado

na Figura 1, este processo, possivelmente, apresenta-se sob controle estatístico, uma vez que nenhum dos 14 pontos encontra-se grafado fora dos limites de controle. Além disso, os pontos estão distribuídos aleatoriamente em torno da linha central. Neste caso, o gerente do processo pode utilizar o gráfico para controlar (monitorar) os valores de novas ou futuras observações da viscosidade a partir de valores observados do volume desgastado. Entretanto, um cuidado que deve ser tomado é quanto a não utilização de valores de  $Y_i$  que venham a extrapolar os limites dos valores utilizados para ajustar a curva de calibração.

#### 4 Simulação de dados

Nesta seção é simulado um processo sob controle estatístico, utilizando as expressões do modelo de calibração funcional, mostradas anteriormente. É simulado o ARL1 e a probabilidade de detecção do gráfico, isto é, simula-se, também, o número médio de amostras até a ocorrência de um alarme, quando o processo estiver operando sob a influência de causas especiais, ou seja, fora de controle estatístico.

Para simular o processo, foi necessário gerar, inicialmente, uma amostra aleatória de 20 pares de observações  $(X_i, Y_i)$ , com  $X_i$  e  $Y_i$  relacionando-se linearmente. Para tanto, os valores de  $X_i$  foram considerados constantes fixas, definidas por:  $X_i = (1, 2, \dots, 20)$ . Os vetores  $\varepsilon_i = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{20}, \varepsilon_{0n+1}, \dots, \varepsilon_{0n+k})$  e  $\delta_i = (\delta_1, \dots, \delta_n)$  foram gerados a partir de uma distribuição normal com média zero e variância um, com amostra de tamanho  $n = 20$ .

O vetor  $U_i = (U_1, \dots, U_n)$  foi gerado a partir da diferença dos valores de  $X_i$  com os valores de  $\delta_i$ , sendo considerados, também, como valores fixos, para satisfazer a condição do modelo funcional. Os valores de  $Y_i$  foram obtidos a partir da expressão  $Y_i = \alpha + \beta U_i + \varepsilon_i$ . Em cada par ordenado, os valores de  $Y_i$ , que foram utilizados nas expressões do modelo funcional, correspondem à média aritmética de 1000 replicações,

isto é,  $Y_i = \frac{\sum_{i=1}^{1000} Y_i}{1000}$ . Como uma das condições adicionais, que fazem com que o modelo de

calibração funcional seja factível é de se supor que a variância dos erros  $\delta_i$  seja conhecida, assim, utilizou-se aqui o valor  $\sigma_{Med}^2 = 1$ .

Os resultados da simulação do processo, assim como do ARL1 e das probabilidades de detecção, são mostrados nas tabelas e gráficos a seguir. Na Figura 2, é mostrado o gráfico do processo simulado sob controle estatístico, com  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $n = 20$  e  $\sigma_{Med}^2 = 1$ .

Como pode ser observado, o programa gerou aleatoriamente todos os pontos dentro dos limites de controle, construídos com 3 desvios padrão distante da linha central. Do total das 20.000 observações procedentes do processo de iteração, o programa contou 11 delas fora dos limites de controle, sendo 6 observações acima do limite inferior e 5 abaixo do limite superior de controle. Isto confirma que o programa gerou um processo sob controle estatístico, pois nesta situação se admitiria até 54 observações fora dos limites. Nos gráficos e tabelas a seguir são apresentados os resultados da simulação.

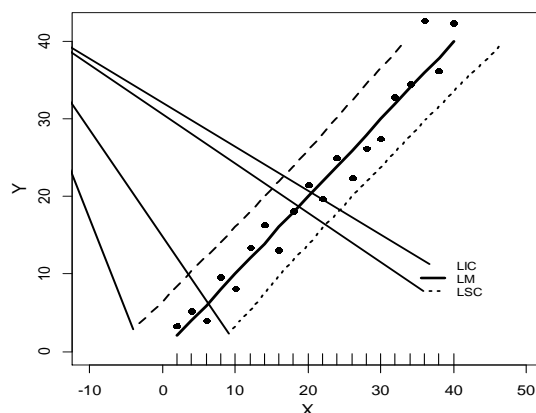


Figura 2 - Gráfico do processo sob controle estatístico, com  $\alpha = 0$  e  $\beta = 1$ .

Observando a Tabela 2, nota-se que pequenas mudanças (aumentos), no valor do intercepto, não são suficientes para que o ARL1 possa diminuir, significativamente. Nota-se que mesmo com o aumento do tamanho da amostra  $n$ , o decréscimo do ARL1 é lento, e qualquer que seja o tamanho da amostra, este decréscimo acontece de uma forma, aproximadamente, linear.

Tabela 2 - Valores do ARL1, modelo funcional normal com  $EP(\hat{\beta}_c)=0$

$EP(\hat{\beta}_c)$	0,3	0,5	0,8	1,3	1,5	2,0
$n$						
20	13	11	9	8	7	6
30	12	10	8	7	6	5
40	10	9	7	6	5	4

Na Figura 3 são mostradas as probabilidades de detecção do gráfico. Como podem ser observadas, essas probabilidades são bem pequenas, mesmo com tamanho da amostra grande,  $n = 40$ , e com o valor do intercepto aumentado em 2 desvios padrão. Nesse caso, a probabilidade de detecção não chega a 25%, e, conseqüentemente, a probabilidade do erro tipo II fica acima de 75%, o que não é desejável num gráfico de controle. Ou seja, se houver alteração apenas nos valores do intercepto, o gráfico não é poderoso em detectar as alterações, principalmente se elas forem pequenas.

Na Figura 3 são mostradas as probabilidades de detecção do gráfico. Como podem ser observadas, essas probabilidades são bem pequenas, mesmo com tamanho da amostra grande,  $n = 40$ , e com o valor do intercepto aumentado em 2 desvios padrão. Nesse caso, a probabilidade de detecção não chega a 25%, e, conseqüentemente, a probabilidade do erro tipo II fica acima de 75%, o que não é desejável num gráfico de controle. Ou seja, se houver alteração apenas nos valores do intercepto, o gráfico não é poderoso em detectar as alterações, principalmente se elas forem pequenas.

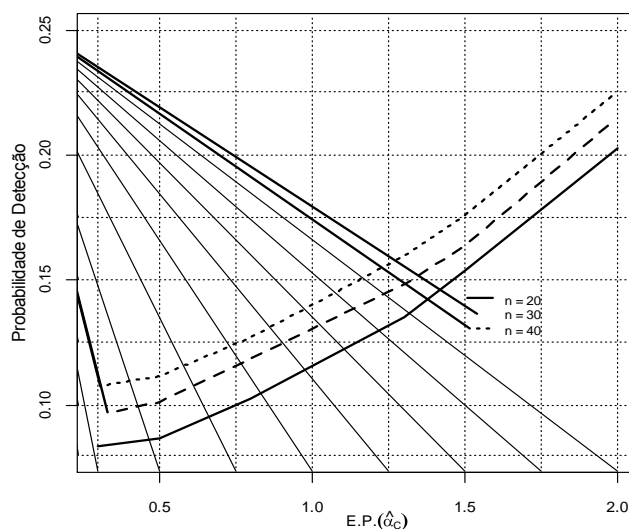


Figura 3 – Probabilidade de detecção do gráfico de controle utilizando o modelo de calibração funcional com  $EP(\hat{\beta}_c)=0$ .

Na Tabela 3 nota-se que, em se mantendo fixo o valor do intercepto  $\alpha = 0$ , e alterando-se apenas o valor do coeficiente de inclinação da reta, o número médio de observações, até a ocorrência de um alarme, diminui mais rapidamente do que no caso anterior. Nota-se que essa redução do ARL1 ainda é um pouco lenta, praticamente linear.

Tabela 3 – Valores do ARL1, modelo funcional normal com  $EP(\hat{\alpha}_c)=0$

$EP(\hat{\beta}_c)$	0,3	0,5	0,8	1,3	1,5	2,0
$n$						
20	11	10	9	7	6	4
30	10	9	8	6	4	3
40	9	8	7	5	4	3

Na Figura 4, que as probabilidades de detecção do gráfico aumentam, consideravelmente, quando o intercepto mantém-se fixo e os valores do coeficiente de inclinação vão aumentando. Nota-se que, mesmo com pequenos aumentos nos valores de  $\beta$  e com tamanho de amostras, também, menores ( $n = 20$ ), por exemplo, as probabilidades estão todas acima de 20%, chegando, inclusive, a superar 80%, quando  $n = 40$  e  $\beta$  sofre um aumento de 2 desvios padrão. Com isso, as probabilidades do erro tipo II diminui drasticamente, o que é sempre desejável num gráfico de controle.

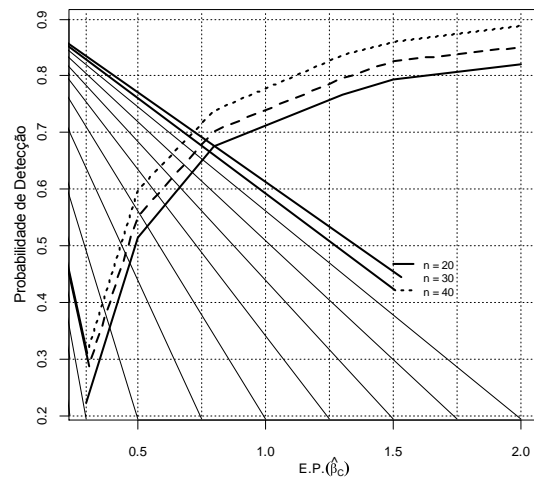


Figura 4 – Probabilidade de detecção do gráfico de controle utilizando o modelo de calibração funcional com  $EP(\hat{\alpha}_c)=0$ .

De um modo geral, quando há duas variáveis que se correlacionam linearmente, e uma delas ou ambas sofrem alterações em suas medidas, isto acarreta mudanças de valores não só no valor do estimador do intercepto  $\hat{\alpha}_c$  ou só no estimador do coeficiente de inclinação  $\hat{\beta}_c$ , mas, sim, em ambos os estimadores dos parâmetros. É, justamente, por este motivo que se realizou, também, uma simulação, utilizando-se vários valores para os estimadores dos parâmetros da regressão, como mostrado nas tabelas e gráficos a seguir.

Os valores da Tabela 4 revelam que a partir do momento em que o intercepto aumenta de valor, passando de 0 (zero) para 0,3 desvios padrão conjuntamente com aumentos no coeficiente de inclinação, o ARL1, continua a diminuir, principalmente, para grandes deslocamentos nos valores de  $\hat{\beta}_c$ . Isto mostra que o gráfico de controle proposto é sensível a mudanças nos valores das variáveis.

Observando-se a Tabela 4 e no gráfico da Figura 5, pode-se notar que o poder do gráfico em detectar alterações nos valores das variáveis envolvidas, no modelo de calibração linear funcional, é grande.

Tabela 4 – Valores do ARL1, modelo funcional normal com  $EP(\hat{\alpha}_c)=0,3$

$EP(\hat{\beta}_c)$	0,3	0,5	0,8	1,3	1,5	2,0
$n$						
20	10	9	7	5	4	3
30	9	8	6	5	4	3
40	8	7	6	4	3	2

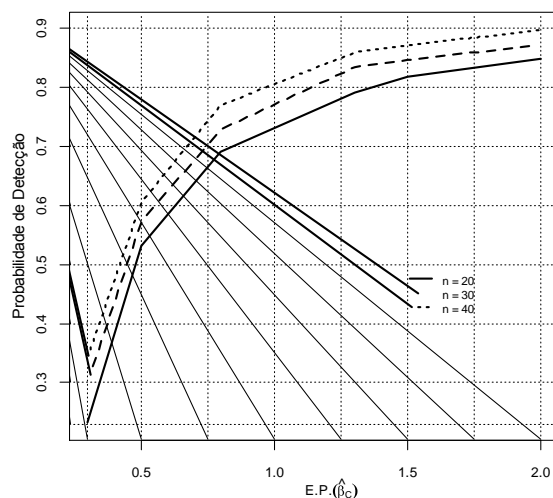


Figura 5 – Probabilidade de detecção do gráfico de controle utilizando o modelo de calibração funcional com  $EP(\hat{\alpha}_c)=0,3$ .

Nota-se que, com o tamanho da amostra igual a 40, o gráfico detecta pequenas alterações nos valores dos coeficientes com probabilidade acima de 60%. Nota-se, também, que, mesmo com valores menores para o tamanho da amostra, a probabilidade de detecção rapidamente ultrapassa os 50%. Dessa forma, as probabilidades do erro tipo II diminuem numa proporção inversa ao aumento do poder do gráfico, como mostrado na Figura 6, revelando, assim, a eficiência do gráfico em detectar a presença de causas especiais no processo.

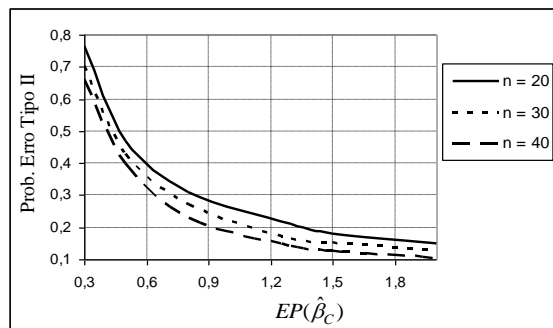


Figura 6 – Probabilidades do erro tipo II do gráfico de controle utilizando o modelo de calibração funcional com  $EP(\hat{\alpha}_c)=0,3$ .

Quando o intercepto sofre uma alteração, na ordem de meio desvio padrão, e o coeficiente de inclinação aumenta seu valor em 2 desvios padrão, as probabilidades de detecção do gráfico ficam acima de oitenta por cento, como pode ser visto na Figura 7. Nota-se, também, na Tabela 5 que, com essa configuração, o número médio de

observações até a ocorrência de alarme verdadeiro é igual a 2, para amostras de tamanho 30 e 40. Nesse caso, as probabilidades de detecção de pontos fora dos limites de controle estão acima de 60%, mesmo que o deslocamento no valor do coeficiente de inclinação seja pequeno (0,6 desvios padrão).

Tabela 5 – Valores do ARL1, modelo funcional normal com  $EP(\hat{\alpha}_c)=0,5$

$EP(\hat{\beta}_c)$	0,3	0,5	0,8	1,3	1,5	2,0
$n$						
20	9	8	6	5	4	3
30	8	7	5	4	3	2
40	7	6	5	4	3	2

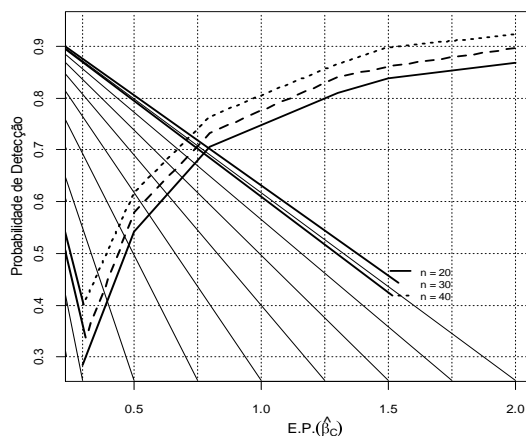


Figura 7 – Probabilidade de detecção do gráfico de controle utilizando o modelo de calibração funcional com  $EP(\hat{\alpha}_c)=0,5$ .

A Tabela 6 mostra que o ARL1 continua a diminuir à medida que se aumenta o valor do intercepto, juntamente com aumentos no valor do coeficiente de inclinação. Nota-se que para todos os tamanhos de amostra utilizados na simulação e deslocamentos de dois desvios padrão em  $\hat{\beta}_c$ , o gráfico capta pontos fora dos limites de controle logo na segunda observação, após o processo sair do controle estatístico, com probabilidades bem elevadas, como mostrado na Figura 8, o que é sempre desejável num controle estatístico de processos.

Tabela 6 – Valores do ARL1, modelo funcional normal com  $EP(\hat{\alpha}_c)=0,8$

$EP(\hat{\beta}_c)$	0,3	0,5	0,8	1,3	1,5	2,0
$N$						
20	8	7	6	5	4	2
30	7	6	5	4	3	2
40	6	5	4	3	2	2



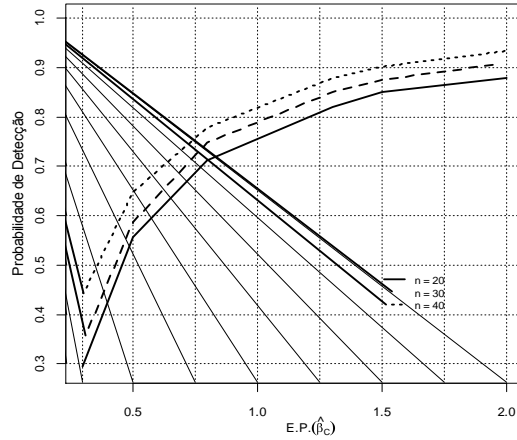


Figura 8 – Probabilidade de detecção do gráfico de controle utilizando o modelo de calibração funcional com  $EP(\hat{\alpha}_c)=0,8$ .

Por outro lado, se os valores das variáveis  $X_i$  e  $Y_i$  continuarem a se alterar seus valores, de modo que o valor de  $\hat{\alpha}_c$  passe de 0,3 para 1 desvio padrão, então, o número médio de observações até a ocorrência de um alarme diminui mais ainda, como mostrado na Tabela 7 e na Figura 9. Nota-se que nesse caso, qualquer que seja o tamanho da amostra, o ARL1 diminui, consideravelmente, quando comparado com as situações anteriores. Se num processo produtivo, o tempo de retirada das amostras for de hora em hora, então o gráfico detecta a presença de causas especiais no processo, no tempo máximo de 7 horas para pequenas alterações nos valores de  $\hat{\beta}_c$ . Se houver grandes mudanças nos valores de  $\hat{\beta}_c$  (2 desvios padrão), então, com o tamanho da amostra igual a 30 ou 40, o gráfico capta tais mudanças, logo na segunda observação, após o processo sair de controle, com probabilidade acima de 90%, como mostrado na Figura 9.

Tabela 7 – Valores do ARL1, modelo funcional normal com  $EP(\hat{\alpha}_c)=1,0$

$EP(\hat{\beta}_c)$ $n$	0,3	0,5	0,8	1,3	1,5	2,0
20	7	6	5	4	3	2
30	6	5	4	3	3	2
40	5	4	3	3	2	2

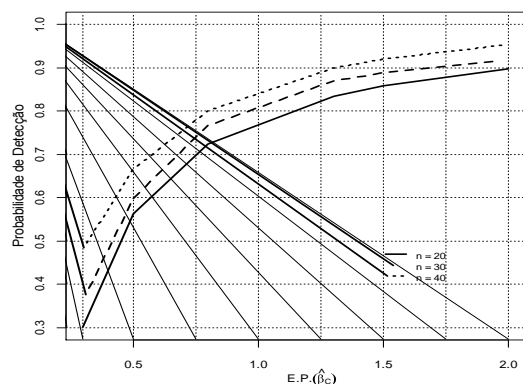


Figura 9 – Probabilidade de detecção do gráfico de controle utilizando o modelo de calibração funcional com  $EP(\hat{\alpha}_c)=1,0$ .

Nota-se que com essa configuração, isto é, com  $\hat{\alpha}_c$  deslocando-se em 1 desvio padrão e  $\hat{\beta}_c$  variando de 0,8 a 2 desvios padrão, o gráfico mostra-se extremamente poderoso, detectando essas alterações com grande probabilidade. Dessa forma, se duas características da qualidade  $X_i$  e  $Y_i$  forem correlacionadas linearmente, de modo que a característica  $X_i$  possa ser considerada como uma constante fixa, mas obtida com erros de medida, então, o gráfico de controle, utilizando o modelo de calibração funcional apresenta-se como uma boa ferramenta para que o engenheiro possa monitorar o processo, construindo um único gráfico de controle.

### Conclusões

Neste artigo foi mostrada a importância de se utilizar modelos de calibração funcional na construção de gráfico de controle para monitorar simultaneamente a relação de duas variáveis correlacionadas linearmente. Discutiu-se a forma utilizada para estimar a variabilidade dos erros de medidas e a formação desses erros no interior da linha de produção de uma empresa. Foram apresentados os estimadores consistentes e não viesados dos parâmetros do modelo de calibração funcional.

Foi apresentado, também, o estimador da curva de calibração e algumas de suas propriedades estatísticas, tais como: consistência e não viés. Obteve-se a variância e o erro padrão do estimador clássico da quantidade desconhecida do verdadeiro valor da variável independente. Discutiu-se ainda o problema relacionado com a dificuldade para se obter intervalos de confiança para um valor predito da variável independente e finalmente foram apresentados os limites inferiores e superiores de controle utilizando o modelo de calibração linear funcional, sob a suposição de se conhecer (ou poder estimar) a variância dos erros.

O processo de simulação de dados confirmou a eficiência do gráfico de controle proposto no artigo na obtenção dos ARL1's e das probabilidades de detecção de pontos fora dos limites de controle. Nessa simulação foi considerado que as variáveis envolvidas no processo, inclusive os erros de medidas, se distribuíssem normalmente. O resultado desse estudo evidencia que o gráfico proposto no artigo é sensível à presença de causas que intervêm no processo detectando-as rapidamente, com grandes probabilidades.

DOMINGOS FILHO, M.; SAMOHYL, R. W. Chart control of calibration functional with assumption of variance of measurement errors known. *Rev. Bras. Biom.*, Lavras, v.34, n.1, p.183-209, 2016.

- **ABSTRACT:** *This article has as its main objective the construction of control charts using the calibration model functional. For this purpose it is assumed that the variance of measurement errors involved in calibration model functional is known, or can be estimated, because this is one of the conditions of regularity of calibration model functional. More precisely, the assumption of knowing one of the variances of the errors makes the functional model is feasible, that is, makes it possible to estimate the parameters of the model. It is believed, also, that the measurement errors of dependent and independent variables are additives and normally distributed.*
- **KEY WORDS:** *Functional calibration; control char; measurement errors.*

### Referência bibliográfica

CHENG, C. L., VAN NESS, J. W. On the Unreplicated Ultrastructural Model, *Biometrika*, v.78, p.442-445, 1991.

CHENG, C. L., VAN NESS, J. W. On Estimating Linear Relationships When Both Variables are Subject to Errors, *Royal Statistical Society*, v.56, n.1, p.167-183, 1994.

CHENG, C. L., VAN NESS, J. W. *Statistical Regression with Measurement Error*. New York, ARNOLD, 1999.

COSTA, A. F. B., EPPRECHT, E.K., CARPINETTI, L.C.R. *Controle Estatístico de Qualidade*. 1.ed. São Paulo: Editora Atlas, 2004.

FERREIRA, D. F. *Estatística Básica*. Lavras: Editora UFLA, 2005. 663p.

FULLER, W. A. *Measurement Error Models*. New York: Wiley, 1987.

GARVIN, D. What Does Product Quality Really Mean? *Sloan Management Review*, Fall 1984.

LIMA, C. R. O. P. *Calibração Absoluta Com Erros nas Variáveis*, Tese de Doutorado, IME-USP, São Paulo, 1996.

MANDEL, B. J. The Regression Control Chart. *Journal of Quality Technology*, v.1, n.1, p.1-9, 1969.

MONTGOMERY, D. C. e RUNGER, G. C. *Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros*. 2 ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2003. 463p.

SHEWHART, W. A., DEMING, W. E. *Statistical Methods From the Viewpoint of Quality Control*, Graduate Scholl, *Department of Agriculture*. Washington, D.C., 1939.

SHUKLA, G. K. On The Problem Calibration. *Technometrics*, v.14, p.547-553, 1972.

ZAR J. H. *Biostatistical Analysis*. 3rd ed. Upper Saddle River, New York: Prentice Hall. 1996. 662p.

Recebido em 12.08.2015

Aprovado após revisão em 18.11.2015