NOVOS TESTES DE NORMALIDADE MULTIVARIADA BASEADOS EM AMOSTRAS BETAS INDEPENDENTES

Renata Aparecida CINTRA[1]
Daniel Furtado FERREIRA[1]

▪ RESUMO: Embrechts, Frey e McNeil (2005) propuseram um teste baseado no teste de Kolmogorov-Smirnov, utilizando o conceito de Gnanadesikan e Kettenring (1972), em que é possível obter amostras betas a partir de amostras normais utilizando uma transformação na distância quadrática de Mahalanobis. Contudo, esse teste é afetado pela dependência amostral presente na distância quadrática utilizada. Liang *et al.* (2004) apresentaram uma forma de obter amostras betas univariadas, cada uma independente e identicamente distribuída, por meio de transformações em uma amostra normal p-variada. Este trabalho teve como principal objetivo propor dois testes para normalidade multivariada com base no que foi proposto por Liang *et al.* (2004): um teste de aderência a partir do teste de Kolmogorov-Smirnov e um teste intensivo fundamentado em *bootstrap* paramétrico. Foram feitas simulações Monte Carlo com o propósito de estimar as taxas de erro tipo I e o poder dos testes e realizadas comparações com outros testes da literatura. Embora os testes propostos tenham obtido um bom controle das taxas de erro tipo I, o uso desses testes não foi recomendado devido ao fraco desempenho de poder apresentado por eles.

▪ PALAVRAS-CHAVE: Distribuição beta; *bootstrap* paramétrico; Kolmogorov-Smirnov; *software* R.

1 Introdução

A verificação de normalidade multivariada é muito importante para garantir que a inferência esteja correta em uma grande parte dos métodos que existem, pois esses, diversas vezes, são baseados em hipóteses de que os dados provém de uma distribuição normal multivariada. Nesse sentido, os testes de normalidade

[1]Universidade Federal de Lavras - UFLA, Departamento de Estatística, Caixa Postal 3037, CEP: 37200-000, Lavras, MG, Brasil. E-mail: *renata_cintra_spu@hotmail.com*; *danielff@des.ufla.br*

multivariada se mostram extremamente relevantes. Contudo, os testes existentes quase sempre possuem limitações. Mecklin e Mundfrom (2005) mostraram que não há um único teste que seja o mais poderoso em todas as situações.

O uso de um teste de hipótese formal é indispensável para presumir a normalidade. No entanto, comumente, faz-se uso de testes visuais para sugerir a normalidade no caso univariado, os quais constituem uma ferramenta de apoio. Embora esse tipo de teste esteja sujeito à interpretação subjetiva e, por isso, imprecisa, algumas adaptações foram feitas ao longo dos anos, possibilitando o uso desses testes visuais para detectar possíveis desvios de normalidade no caso multivariado.

Gnanadesikan e Kettenring (1972) provaram que é possível obter amostras betas a partir de amostras normais utilizando uma transformação na distância quadrática de Mahalanobis. Partindo desse resultado, construíram gráficos quantil-quantil (Q-Q *plots*) utilizando as amostras obtidas a partir das transformações nos dados iniciais, para verificar se essas provinham da distribuição beta. Em caso de as amostras serem provenientes de uma beta, poder-se-ia indicar que a amostra multivariada seria de uma distribuição normal multivariada.

Embrechts *et al.* (2005) propuseram um teste baseado na estrutura do teste de Kolmogorov-Smirnov utilizando esses conceitos. Contudo, além de serem formas de verificação puramente visuais, os Q-Q *plots* e os testes para normalidade multivariada que se fundamentam na distância de Mahalanobis sofrem influência da dependência entre os D_j^2, com $j = 1, \ldots, n$, pois cada D_j^2 possui em sua fórmula $\bar{\boldsymbol{X}}$ e $\boldsymbol{S}$. Portanto, a dependência amostral também está presente nos testes que são construídos utilizando amostra de uma distribuição beta exata, obtida por transformação na distância de Mahalanobis.

Uma forma de contornar o problema da dependência amostral nesses Q-Q *plots* e no teste de Embrechts *et al.* (2005) foi apresentada por Liang *et al.* (2004). Tratam-se de transformações em uma amostra p-variada, que sob a hipótese nula de normalidade multivariada, conduzem a $p-1$ amostras betas univariadas. Cada uma dessas amostras betas é independente e identicamente distribuída. Utilizando uma dessas amostras betas, Liang *et al.* (2004) apresentaram Q-Q plots como ferramentas complementares para detectar um possível desvio de normalidade em análise de dados de alta dimensão.

Tendo em vista o problema da dependência amostral presente nos testes construídos com base na obtenção de amostras betas e a partir do que foi proposto por Liang *et al.* (2004), este trabalho teve como principal objetivo propor dois testes para normalidade multivariada baseados na obtenção de amostras betas que não fossem afetados pela dependência amostral.

Como objetivos específicos, destacam-se: propor um teste de normalidade multivariada baseado na obtenção de amostras betas utilizando o teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov (TKS); propor um teste *bootstrap* paramétrico para a normalidade multivariada baseado na obtenção de amostras betas (TBPb); realizar a avaliação do desempenho dos testes, utilizando simulação Monte Carlo, para verificar o controle da taxa de erro tipo I e o poder de cada um dos testes propostos;

e comparar os testes propostos com o teste de normalidade multivariada de Royston (1983) (TSW) e com o teste de normalidade multivariada proposto por Embrechts *et al.* (2005)(TEM).

Embora os testes propostos não tenham apresentado resultados satisfatórios em relação a outros já existentes, é preciso ressaltar a importância de se apresentar os resultados deste trabalho para a comunidade científica. Uma vez que o procedimento já foi tido como não eficiente, evita-se que outros pesquisadores despendam seu tempo realizando o mesmo trabalho. Além disso, permite-se que alternativas para melhorar o desempenho dos testes aqui propostos sejam pesquisadas.

2 Metodologia

Para a construção dos testes propostos neste trabalho foram utilizadas as definições, teorema e corolário encontrados em Liang *et al.* (2004).

Seja $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^p$ uma variável aleatória que segue distribuição normal multivariada $N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$, com média $\mathbf{0}$ e matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}$. Dada uma amostra aleatória $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ independente e identicamente distribuída (i.i.d.), da variável aleatória $\boldsymbol{X}$, tem-se que:

$$\boldsymbol{S}_k = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{X}_i \boldsymbol{X}_i^\top,$$

$$\boldsymbol{Y}_k = \boldsymbol{S}_k^{-1/2} \boldsymbol{X}_k, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{Z}_k = \frac{\boldsymbol{Y}_k}{\sqrt{1 - \boldsymbol{Y}_k^\top \boldsymbol{Y}_k}}, \tag{2}$$

para $k = p+1, \ldots, n$, em que $\boldsymbol{S}_k^{-1/2} = \left(\boldsymbol{S}_k^{1/2}\right)^{-1}$ e $\boldsymbol{S}_k^{1/2}$ é a raiz quadrada positiva definida de $\boldsymbol{S}_k$.

Então, é possível fazer uma caracterização para a distribuição normal multivariada $N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$, como descreve o teorema enunciado a seguir, apresentado em Yang *et al.* (1996):

Teorema 1. Seja $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ uma amostra i.i.d. da $N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$. Defina os vetores aleatórios $\boldsymbol{Y}_k$ e $\boldsymbol{Z}_k$ como em (1) e (2), respectivamente. Então,

1. $\boldsymbol{Y}_{p+1}, \ldots, \boldsymbol{Y}_n$ são mutuamente independentes e $\boldsymbol{Y}_k (k \geq p+1)$ segue uma distribuição multivariada simétrica Pearson tipo II com a função densidade probabilidade (f.d.p.)

$$f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}; k) = \frac{\Gamma(k/2)}{\pi^{p/2}\Gamma(k-p)/2})(1 - \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{y})^{(k-p-2)/2}, \ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^p, \ \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{y} < 1;$$

2. $\boldsymbol{Z}_{p+1}, \ldots, \boldsymbol{Z}_n$ são mutuamente independentes e $\boldsymbol{Z}_k(k \geq p+1)$ tem uma distribuição multivariada simétrica Pearson tipo VII com a f.d.p.

$$h_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{z}; k) = \frac{\Gamma(k/2)}{\pi^{p/2}\Gamma(k-p)/2})(1+\boldsymbol{z}^\top \boldsymbol{z})^{-k/2},\ \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^p; \tag{3}$$

3. Seja $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n \in \mathbb{R}^p$ i.i.d. com uma f.d.p. $\nu(\boldsymbol{x})$ que é contínua em $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^p$ e $\nu(\mathbf{0}) > 0$. Defina os vetores aleatórios $\boldsymbol{Z}_k$ como em (2). Se $\boldsymbol{Z}_k$ e $\boldsymbol{Z}_{k-1}(k \geq p+2)$ tem f.d.p.'s $h_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{z}; k)$ e $h_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{z}; k-1)$ definidas em (3). Então, $\boldsymbol{X}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ tem uma distribuição normal multivariada.

Corolário 1. Assuma que $\boldsymbol{X}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{X}_n$ são i.i.d. $\sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Defina os vetores aleatórios

$$\boldsymbol{U}_i = \frac{\boldsymbol{X}_1 + \ldots + \boldsymbol{X}_i - i\boldsymbol{X}_{i+1}}{\sqrt{i(i+1)}},\ i = 1, \ldots, n-1,$$

$$\boldsymbol{S}_k = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{U}_i \boldsymbol{U}_i^\top \text{ e } \boldsymbol{Y}_k = \boldsymbol{S}_k^{-1/2} \boldsymbol{U}_k,\ k = p+1, \ldots, n-1.$$

Seja $\boldsymbol{Y}_k = (Y_{k1}, \ldots, Y_{kp})^\top : p \times 1(k = p+1, \ldots n-1)$,

$$\bar{Y}_k = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} Y_{ki},\ T_k = \frac{\sqrt{p}\bar{Y}_k}{S_k},\ S_k^2 = \frac{1}{p-1}\sum_{i=1}^{p}(Y_{ki} - \bar{Y}_k)^2;$$

$$F_{kq} = \frac{(p-q)\sum\limits_{i=1}^{q} Y_{ki}^2}{q\sum\limits_{i=q+1}^{p} Y_{ki}^2},\ B_{kq} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{q} Y_{ki}^2}{\sum\limits_{i=1}^{p} Y_{ki}^2},\ q = 1, \ldots, p-1;$$

para $k = 1, \ldots, n-1$. Então,

1. $\{T_k\ :\ k = p+1, \ldots, n-1\}$ são i.i.d. $\sim t(p-1)$, a distribuição t-Student com $p-1$ graus de liberdade;

2. Para cada $q(q = 1, \ldots, p-1)$, $\{F_{kq}\ :\ k = p+1, \ldots, n-1\}$ são i.i.d. $\sim F(q, p-q)$, a distribuição F com $(q, p-q)$ graus de liberdade;

3. Para cada $q(q = 1, \ldots, p-1)$, $\{B_{kq}\ :\ k = p+1, \ldots, n-1\}$ são i.i.d. $\sim B(q/2, (p-q)/2)$, a distribuição beta com parâmetros $q/2$ e $(p-q)/2$.

Conforme foi apresentado, as variáveis aleatórias B_{kq}, $q = 1, \ldots, p-1$, provenientes das transformações são independentes. Portanto, o Teorema (Liang *et al.*, 2004) e Corolário (Liang *et al.*, 2004) se propõem como procedimentos, sugestivamente, melhores do que aqueles apresentados por Embrechts *et al.* (2005).

Obtidas as variáveis aleatórias B_{kq}, Li *et al.* (1997) sugerem que seja usado o valor $q = \lfloor p/2 \rfloor$, ou seja, a parte inteira da metade de p, na construção do Q-Q plot. A escolha está fundamentada no bom desempenho desse valor em experiências com dados. Utilizando o valor de q recomendado por Li *et al.* (1997), basta seguir os passos para construir os Q-Q plots: obter as estatísticas de ordem $B_{(k)q}$, estimar os quantis da distribuição beta (b^*_{kq}) e plotar os valores $B_{(k)q}$ e b^*_{kq}, observando se há algum padrão linear. Caso não haja, interpreta-se como um desvio de normalidade multivariada.

2.1 Testes de normalidade multivariada propostos

Como auxílio computacional foi utilizado o programa R (R CORE TEAM , 2016) para implementar os algoritmos dos dois testes de normalidade multivariada propostos. E as bibliotecas `MASS` (VENABLES, 2002) e `mvtnorm` (GENZ *et al.*, 2016).

Para exemplificar a aplicação dos testes propostos, utilizou-se um conjunto de dados fornecido por Royston (1983), referente à concentração de hemoglobina e contagem de linfócitos. Uma desrição mais detalhada dos dados pode ser encontrada em Ferreira (2011).

Considere uma amostra aleatória representada por $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\ldots,\boldsymbol{X}_j,\ldots,\boldsymbol{X}_n$, em que $\boldsymbol{X}_j \in \mathbb{R}^p$ provém de uma população com vetor de médias $\boldsymbol{\mu}$, cuja dimensão é $p \times 1$, e matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}$, de dimensão $p \times p$. Pretende-se testar a seguinte hipótese nula:

H_0 : a amostra é de uma variável aleatória normal multivariada, com vetor de médias $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$ e matriz de covariância positiva definida $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{p\times p}$.

2.1.1 Teste de normalidade multivariada utilizando o teste de Kolmogorov-Smirnov baseado na obtenção de amostras betas

Por questões de organização, optou-se por descrever os passos dos testes propostos na forma de algoritmo. Inicialmente, considere a amostra aleatória e a hipótese nula apresentadas na seção anterior. Os passos para a realização do teste de normalidade multivariada utilizando Kolmogorov-Smirnov baseado na obtenção de amostras betas são:

1. considere uma matriz de dados $\boldsymbol{X}_{n\times p}$:

$$\boldsymbol{X}_{n\times p} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1^\top \\ \boldsymbol{X}_2^\top \\ \vdots \\ \boldsymbol{X}_n^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{np} \end{bmatrix};$$

2. calculam-se os vetores aleatórios $\boldsymbol{U}_i$:

$$\boldsymbol{U}_i = \frac{\boldsymbol{X}_1 + \ldots + \boldsymbol{X}_i - i\boldsymbol{X}_{i+1}}{\sqrt{i(i+1)}},\ i = 1,\ldots,n-1;$$

3. realizam-se as transformações para se obter $\boldsymbol{S}_k$:

$$\boldsymbol{S}_k = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{U}_i \boldsymbol{U}_i^{\top},\ k = p+1, \ldots, n-1;$$

4. obtém-se os fatores de Cholesky, $\boldsymbol{S}_k^{1/2}$, das matrizes $\boldsymbol{S}_k$;

5. invertem-se os fatores de Cholesky, de modo que se tenha $\boldsymbol{S}_k^{-1/2}$;

6. determinam-se os vetores $\boldsymbol{Y}_k$:

$$\boldsymbol{Y}_k = \boldsymbol{S}_k^{-1/2} \boldsymbol{U}_k,\ k = p+1, \ldots, n-1,$$

   em que $\boldsymbol{Y}_k = (Y_{k1}, \ldots, Y_{kp})^{\top} : p \times 1 (k = p+1, \ldots n-1)$;

7. obtém-se os B_{kq}:

$$B_{kq} = \frac{\sum_{i=1}^{q} Y_{ki}^2}{\sum_{i=1}^{p} Y_{ki}^2},\ q = 1, \ldots, p-1,$$

   que podem ser arranjados em uma matriz da seguinte forma:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} B_{p+1,1} & B_{p+1,2} & \ldots & B_{p+1,p-1} \\ B_{p+2,1} & B_{p+2,2} & \ldots & B_{p+2,p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n-1,1} & B_{n-1,2} & \ldots & B_{n-1,p-1} \end{bmatrix}.$$

   Caso os dados da matriz $\boldsymbol{X}_{n \times p}$ sejam uma amostra aleatória de uma distribuição $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, então, cada coluna da matriz $\boldsymbol{B}$ será uma amostra aleatória da distribuição beta$(q/2,\ (p-q)/2)$, com $q = 1,\ 2,\ \ldots,\ p-1$ (LIANG *et al.*, 2004).

8. seleciona-se a coluna $q^* = \lfloor p/2 \rfloor$, como sugerido por Li *et al.* (1997);

9. aplica-se o teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov na coluna selecionada para verificar se essa é uma amostra proveniente de uma variável aleatória que segue distribuição beta com parâmetros $q^*/2$ e $(p - q^*)/2$;

10. retorna-se o valor-p e o valor da estatística de Kolmogorov-Smirnov.

De acordo com o valor-p, toma-se a decisão de rejeitar ou não a hipótese nula de que a amostra provém da distribuição beta, dado um nível de significância nominal α. A não rejeição da hipótese nula do teste de Kolmogorov-Smirnov implica na não rejeição da hipótese nula de que a matriz de dados $\boldsymbol{X}_{n \times p}$ é uma amostra de uma normal p-variada, com vetor de médias $\boldsymbol{\mu}$ e matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}$.

Do mesmo modo, a rejeição da hipótese nula do teste de Kolmogorov-Smirnov resulta em rejeição da normalidade multivariada. Essa conclusão é possível devido ao Corolário 1 do Teorema 1.

2.1.2 Teste *bootstrap* paramétrico de normalidade multivariada baseado na obtenção de amostras betas

O segundo teste proposto se fundamenta na escolha do q cuja estatística do teste de Kolmogorov-Smirnov é máxima. Sendo, portanto, q^* igual ao máximo da estatística de Kolmogorov-Smirnov e não mais $q^* = \lfloor p/2 \rfloor$. Como a distribuição do máximo da estatística de Kolmogorov-Smirnov é desconhecida, recorreu-se ao método *bootstrap* paramétrico para se obter uma amostra aleatória da distribuição do máximo da estatística de Kolmogorov-Smirnov.

Novamente, considere a amostra aleatória e a hipótese nula apresentadas na Seção 2.1. Os passos para a realização do teste *bootstrap* paramétrico de normalidade multivariada baseado na obtenção de amostras betas são:

1. considere uma matriz de dados $\boldsymbol{X}_{n\times p}$:

$$\boldsymbol{X}_{n\times p} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1^\top \\ \boldsymbol{X}_2^\top \\ \vdots \\ \boldsymbol{X}_j^\top \\ \vdots \\ \boldsymbol{X}_n^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{j1} & x_{j2} & \dots & x_{jp} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{bmatrix};$$

2. calculam-se os $\boldsymbol{U}_i$, $\boldsymbol{S}_k$, $\boldsymbol{Y}_k$ e B_{kq}, conforme passos de 2 a 7 do algoritmo da seção 2.1.1, a partir dos dados originais $\boldsymbol{X}_{n\times p}$. A matriz dos B_{kq}

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} B_{p+1,1} & B_{p+1,2} & \dots & B_{p+1,p-1} \\ B_{p+2,1} & B_{p+2,2} & \dots & B_{p+2,p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n,1} & B_{n,2} & \dots & B_{n,p-1} \end{bmatrix};$$

3. calculam-se D_q, $q = 1, \dots, p-1$, ou seja, as estatísticas do teste de Kolmogorov-Smirnov para verificar a aderência da q-ésima coluna da matriz $\boldsymbol{B}$ com uma distribuição beta com parâmetros $q/2$ e $(p-q)/2$, utilizando essa matriz B obtida da amostra original;

4. obtém-se $D_0^+ = max(D_q)$, $q = 1, \dots, p-1$, isto é, o máximo das estatísticas de Kolmogorov-Smirnov obtidas com a matriz $\boldsymbol{B}$ proveniente da amostra original;

5. para a obtenção da distribuição nula *bootstrap*, utilizou-se o fato de que sob H_0, os $\boldsymbol{U}_i \sim N_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma})$; Como $\boldsymbol{\Sigma}$ é desconhecida, utilizou-se a matriz de

covariância $\boldsymbol{S}$ da amostra original $\boldsymbol{X}_{n\times p}$, para se utilizar como estimador da matriz $\boldsymbol{\Sigma}$ na reamostragem *bootstrap*;

6. geram-se N_B amostras *bootstrap* de tamanho $n-1$, $\boldsymbol{U}_1^*$, $\boldsymbol{U}_2^*$, ..., $\boldsymbol{U}_{n-1}^*$, da distribuição $N_p(\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{S})$;

7. repetem-se os passos seguintes para cada uma dessas N_B amostras *bootstrap* geradas:

   (a) realizam-se as transformações para se obter $\boldsymbol{S}_k$:

   $$\boldsymbol{S}_k = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{U}_i^* \boldsymbol{U}_i^{*\top},\ k = p+1, \ldots, n-1;$$

   (b) obtém-se os fatores de Cholesky, para se utilizar como $\boldsymbol{S}_k^{1/2}$, das matrizes $\boldsymbol{S}_k$;

   (c) invertem-se os fatores de Cholesky, de modo que se tenha $\boldsymbol{S}_k^{-1/2}$;

   (d) determinam-se os vetores $\boldsymbol{Y}_k$:

   $$\boldsymbol{Y}_k^* = \boldsymbol{S}_k^{-1/2} \boldsymbol{U}_k^*,\ k = p+1, \ldots, n-1,$$

   em que $\boldsymbol{Y}_k^* = (Y_{k1}^*, \ldots, Y_{kp}^*)^\top : p \times 1 (k = p+1, \ldots n-1)$;

   (e) obtém-se os B_{kq}^*:

   $$B_{kq}^* = \frac{\sum\limits_{i=1}^{q} Y_{ki}^{*2}}{\sum\limits_{i=1}^{p} Y_{ki}^{*2}},\ q = 1, \ldots, p-1;$$

   (f) calculam-se D_q^*, $q = 1, \ldots, p-1$, ou seja, as estatísticas do teste de Kolmogorov-Smirnov de cada coluna da matriz $\boldsymbol{B}^*$, que é a matriz $\boldsymbol{B}$ obtida na amostra *bootstrap*;

   (g) obtém-se $D_i^+ = max(D_q)$, $\quad q = 1, \ldots, p-1$, isto é, o máximo das estatísticas de Kolmogorov-Smirnov obtidas com a matriz $\boldsymbol{B}^*$, da i-ésima amostra de *bootstrap*, para $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N_B$;

8. obtida a amostra da distribuição nula *bootstrap*, dada por D_0^+, D_1^+, D_2^+,..., $D_{N_B}^+$, do máximo da estatística de Kolmogorov-Smirnov, calcula-se o valor-p da seguinte forma:

   $$valor-p = \frac{\sum\limits_{i=0}^{N_B} I(D_0^+ \leq D_i^+)}{N_B + 1},$$

   em que $I(\cdot)$ é uma função indicadora;

9. retorna-se o valor-p e o valor da estatística D_0^+ da amostra original.

Dado um nível de significância α, rejeita-se H_0, a hipótese nula de que os dados seguem uma distribuição normal multivariada, se, e somente se, o valor-$p \leq \alpha$. Do mesmo modo que no teste proposto anteriormente, a conclusão só é possível devido ao Teorema 1 e Corolário 1.

2.2 Validação do desempenho

O programa R também foi usado para realizar simulações Monte Carlo com o propósito de estimar as taxas de erro tipo I e o poder dos testes. Foram realizadas comparações dos testes propostos com dois testes de normalidade multivariada: o teste de normalidade multivariada que foi apresentado por Embrechts *et al.* (2005) (TEM) e o teste de Shapiro-Wilk de normalidade multivariada proposto por Royston (1983) (TSW), cuja rotina foi implementada por Silva (2009) quando ele comparou esse teste com o teste de normalidade de Shapiro-Francia para o caso multivariado.

O TEM foi escolhido porque, assim como os testes propostos nesse trabalho, também é baseado em amostra beta, no entanto, é afetado pela dependência amostral presente na distância quadrática de Mahalanobis. O TSW foi selecionado para a comparação por ser um teste de normalidade multivariada bastante conhecido e com uso muito difundido. Ambos os testes comparados foram submetidos à validação por simulação Monte Carlo da mesma forma que os dois testes propostos.

As taxas de erro tipo I foram avaliadas utilizando simulação de amostras aleatórias normais p-variadas com vetor de médias $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ e matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2\boldsymbol{\rho}$, sem perda de generalidade, em que $\boldsymbol{\rho}$ é dada por:

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho \\ \rho & 1 & \dots & \rho \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho & \rho & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Tanto para o TKS quanto para TBPb pode-se utilizar essa estrutura de covariâncias na simulação para a validação, já que os parâmetros das distribuições betas, obtidas pelas transformações nos dados, são invariantes em relação à matriz $\boldsymbol{\Sigma}$. Deve-se ressaltar que ambos os testes estão restritos a $n > p + 2$.

Para ambos os testes propostos e para os testes utilizados nas comparações, foram simuladas amostras normais de acordo com os diferentes valores de n e p, conforme apresentado na Tabela 1 - Anexo. Para o teste TBPb não foram apresentados resultados para as combinações $n = 200$ com $p = 150$ e $p = 197$, $n = 500$ e $n = 1000$ com $p = 5$. Isso porque o tempo de execução das simulações de validação é demasiadamente longo.

Foram realizadas 2000 simulações Monte Carlo. Os dois testes propostos bem como os dois testes utilizados para comparação foram aplicados em cada amostra normal multivariada simulada ao nível de significância nominal de 5%, de tal forma que foi computado o número de vezes que a hipótese nula foi rejeitada e dividido pelo número de simulações, fornecendo as taxas de erro tipo I empíricas.

Para estimar o poder dos testes propostos, ou seja, a probabilidade de se rejeitar a hipótese nula dado que a mesma é falsa, foram simuladas amostras aleatórias de distribuições multivariadas não normais, utilizando as funções geradoras de variáveis aleatórias do programa R ou implementações próprias também em linguagem R. As distribuições utilizadas foram: normal contaminada, uniforme multivariada, log-normal multivariada e *t-Student* multivariada com grau de liberdade $\nu = 1$ e, também, com graus de liberdade $\nu = 30$.

O processo de simulação Monte Carlo foi repetido 2000 vezes para cada uma das distribuições não normais citadas, para cada tamanho da amostra n e os números de variáveis p correspondentes, apresentados na Tabela 1 - Anexo. Os testes de normalidade multivariada propostos e os testes comparados foram aplicados em cada amostra gerada e o nível de significância nominal α fixado foi 5%.

Computou-se, então, o número de vezes que a hipótese nula foi rejeitada para cada teste, dividindo-o pelo total de amostras simuladas. Como as amostras geradas são não normais, o quociente representa a proporção de rejeições da hipótese nula falsa, estimando o poder de cada um dos dois testes propostos e dos testes utilizados para comparação.

3 Resultados e discussão

3.1 Erro tipo I

Os erros tipo I e tipo II têm probabilidades associadas inversamente proporcionais e a probabilidade complementar do erro tipo II é o poder do teste de hipótese. Desse modo, se a probabilidade de se incorrer no erro tipo I for diminuída, a probabilidade de se cometer o erro tipo II aumentará. Quando as taxas de erro tipo I observadas não são significativamente diferentes do nível nominal de significância fixado, o teste é considerado exato. Em contrapartida, se essas taxas são inferiores ao nível de significância nominal fixado, o teste é tido como conservativo. Finalmente, se as taxas são superiores ao nível nominal de significância, o teste é liberal. Para classificar os testes dessa forma, foi utilizado o teste binomial exato com nível de significância de 1%.

Na Tabela 3 - Anexo, têm-se as taxas de erro tipo I dos testes TKS, TBPb, TEM e TSW, considerando a distribuição normal multivariada em função das combinações de n e p para $\alpha = 5\%$. O teste TKS apresentou taxas de erro tipo I não significativamente (valor-$p > 0,01$) diferentes do nível de significância nominal de 5% para a maior parte das combinações de n e p, com exceção da situação $n = 500$ com $p = 5$, em que o teste foi conservativo. O teste TBPb obteve controle da taxa de erro tipo I para todas as combinações de n e p em que foi submetido, mostrando-se um teste exato, excluindo-se da afirmação as situações de $n = 500$ e $n = 1000$ com $p = 5$, para as quais o resultado não foi obtido.

Ainda na Tabela 3 - Anexo, o TEM se mostrou conservativo em todas as combinações de n e p para $\alpha = 5\%$. Enquanto que o teste TSW mostrou controle da taxa de erro tipo I na maioria das situações, a não ser nas combinações $n = 100$ com $p = 50$ e $n = 200$ com $p = 100$, em que a taxa de erro tipo I foi significativamente (valor-$p < 0,01$) inferior que o nível nominal de 5%, sendo conservativo nesses casos.

Mecklin e Mundfrom (2005) realizaram a comparação das taxas de erro tipo I por simulações Monte Carlo para os seguintes testes de normalidade multivariada: teste de assimetria de Mardia (1970), teste de curtose de Mardia (1970), teste de ajuste de Hawkins (1981), teste de Koziol (1982), teste de assimetria e curtose de Mardia e Foster (1983), teste de Royston (1983), teste de Paulson, Roohan e Sullo (1987), teste de Henze e Zirkler (1990), teste de assimetria e curtose de Mardia e Kent (1991), teste de Romeu e Ozturk (1993), teste de correlação clássico de Singh (1993), teste de correlação robusto de Singh (1993) e teste de Mudholkar *et al.* (1995).

Segundo Mecklin e Mundfrom (2005), no nível nominal de 5% de significância, o teste de Mardia-Foster foi o que teve maior variação das taxas de erro tipo I, que oscilaram de 0 a 1. O teste de Hawkins apresentou taxa de erro tipo I de 1 para $n = 25$ com $p = 5$. Os testes de Singh robusto, Mudholkar-Srivastava-Lin, Romeu-Ozturl e Mardia-Kent apresentaram valores de taxas de erro tipo I superiores ao nível de significância nominal de 5%, caracterizando-se liberais. Os testes de Koziol, de assimetria de Mardia e de Singh clássico foram liberais em todas as situações. Por outro lado, os testes de Henze-Zirkler, de curtose de Mardia e de Paulson-Roohan-Sullo foram conservativos na maioria das situações. O teste de Royston (1983) foi o que apresentou o melhor controle das taxas de erro tipo I, que variaram de 0,0470 a 0,0530.

O teste de normalidade multivariado de curtose avaliado por Cirillo e Ferreira (2003) foi conservativo ao nível nominal de 5%. Já o teste de normalidade multivariada baseado no coeficiente de correlação Quantil-Quantil e o teste de normalidade multivariado de simetria comparados por Cirillo e Ferreira (2003) foram exatos. O teste de normalidade Shapiro-Francia multivariado que Silva (2009) propôs e avaliou também foi exato.

Ressalta-se que os autores Mecklin e Mundfrom (2005), Cirillo e Ferreira (2003) e Silva (2009) realizaram 10.000 simulações Monte Carlo, enquanto a validação realizada neste trabalho utilizou 2.000 simulações. Diante da Tabela 3 - Anexo, é notável que os dois testes propostos foram exatos ao nível nominal de 5% de significância e, comparando com as avaliações que esses autores fizeram, ambos apresentaram controle da taxa de erro tipo I melhor do que alguns dos testes de normalidade multivariada avaliados por esses autores.

3.2 Poder dos testes

Os valores de poder dos testes TKS, TBPb, TEM e TSW, considerando a distribuição *t-Student* multivariada com $\nu = 1$ grau de liberdade em função de n e p para $\alpha = 5\%$, são apresentados na Tabela 4 - Anexo.

Os testes TKS e TBPb apresentaram os piores valores de poder nas situações em que a diferença entre o tamanho da amostra, n, e o número de variáveis, p, foi maior e quando p se aproximou de n. Deve-se ressaltar a restrição do TKS e do TBPb a $n > p+2$. O TKS apresentou melhor desempenho nas combinações $n = 50$ com $p = 10$ e $p = 25$, $n = 100$ com $p = 10$ e $p = 50$, $n = 200$ com $p = 10$, $p = 50$ e $p = 100$ e $n = 500$ e $n = 1000$ com $p = 5$, mas o desempenho ainda foi inferior aos testes TEM e TSW. O mesmo se verificou para o TBPb, com a exceção das combinações $n = 100$ com $p = 97$ e $n = 200$ com $p = 100$ e em que o programa R retornou um erro de inversão da matriz $\boldsymbol{S}_k$, pois em uma das N simulações Monte Carlo essa matriz foi singular. Também, com exceção de $n = 200$ com $p = 150$ e $p = 197$, $n = 500$ e $n = 1000$ com $p = 5$, cujos resultados demandam tempo demasiado.

O TEM apresentou valores de poder inferiores aos do TSW na maioria das situações, tendo o pior desempenho quando o número de variáveis se aproximou do tamanho da amostra, casos em que o poder foi inferior ao nível de significância nominal. O TSW foi o que mostrou melhor desempenho de poder em relação aos demais testes.

O teste qui-quadrado de Pearson multivariado e o teste conjunto de assimetria e curtose avaliados por Oliveira e Ferreira (2009) apresentaram bom desempenho de poder considerando a distribuição *t-Student* multivariada com $\nu = 1$ grau de liberdade para $\alpha = 5\%$. O teste de normalidade multivariada baseado em *bootstrap* paramétrico e o teste Monte Carlo de normalidade multivariada baseado em distâncias, propostos e avaliados por Biase (2011), foram superiores, em desempenho de poder, aos testes avaliados por Oliveira e Ferreira (2009) e aos testes apresentados na Tabela 4 - Anexo.

Deve-se salientar que a distribuição *t-Student* multivariada com $\nu = 1$ grau de liberdade é uma distribuição bem distinta da normal multivariada, o que faz com que os valores de poder sejam elevados de modo geral em relação a outras distribuições não normais multivariadas não tão distintas da normal multivariada. Entretanto, o desempenho dos testes propostos, mesmo em uma situação tão favorável, foi muito fraco, em relação ao desempenho de seus concorrentes.

A semelhança com a normal multivariada é o caso, por exemplo, da distribuição *t-Student* com $\nu = 30$ graus de liberdade, cujos resultados dos valores de poder dos testes são exibidos na Tabela 5 - Anexo.

Os desempenhos de poder para os TKS, TBPb, TEM e TSWNM, considerando a distribuição *t-Student* multivariada com $\nu = 30$ graus de liberdade, para $\alpha = 5\%$ em função de n e p, são indicados na Tabela 5 - Anexo. O TKS e o TBPb apresentaram valores de poder próximos ao do nível de significância nominal de 5% na maioria das combinações. O que significa que ambos os testes propostos não conseguiram distinguir a distribuição normal multivariada de uma distribuição muito semelhante.

O TEM apresentou valores de poder inferiores ao nível de significância nominal na maioria das situações quando $n < 200$. O teste mostrou um bom desempenho para o poder somente em tamanhos grandes de amostra, nas combinações $n = 200$

com $p = 50$, $p = 100$ e $p = 150$ e $n = 1000$ com $p = 5$.

Para a distribuição *t-Student* multivariada com $\nu = 30$ graus de liberdade, o TSW não apresentou bom desempenho de poder. Inclusive, para as situações em que o tamanho da amostra foi pequeno, os valores de poder se aproximaram do nível nominal de significância de 10%.

Os testes propostos por Biase (2011) apresentaram melhores valores de poder do que o teste conjunto de simetria e curtose multivariado e o teste qui-quadrado de Pearson multivariado, avaliados por Oliveira e Ferreira (2009), para as situações de $n = 10$ e $n = 20$. O teste de normalidade multivariada baseado em *bootstrap* paramétrico de Biase (2011) foi superior em desempenho de poder na maioria das combinações de n e p em relação aos testes avaliados por Oliveira e Ferreira (2009) e aos testes TKS, TBPb e TSW.

Na Tabela 6 - Anexo são apresentados os desempenhos para o poder dos testes TKS, TBPb, TEM e TSW, considerando a distribuição lognormal multivariada para $\alpha = 5\%$, em função de n e p.

Os testes TKS e TBPb obtiveram valores de poder reduzidos para a maioria das combinações de n e p, exceto para as situações de $n = 100$ com $p = 50$ e de $n = 200$ com $p = 50$ e $p = 100$, sendo que, de uma maneira geral, o teste TBPb teve desempenho minimamente melhor que o TKS. No entanto, os testes só foram mais poderosos que o TEM para as combinações em que n e p são próximos, circunstância em que TEM tem poder igual a zero. Excetuando os casos que n e p são próximos, o teste TEM apresentou baixo poder para $n \leq 20$ e alto poder (valores próximos ou iguais a 100%) para $n \geq 50$. Enquanto que o teste TSW apresentou um poder elevado para todas as combinações de n e p, exceto para a combinação $n = 10$ e $p = 2$.

Nas comparações de poder realizadas por Mecklin e Mundfrom (2005), para o nível de significância nominal de 5%, considerando a distribuição log-normal multivariada, o teste de curtose de Mardia (1970) apresentou o menor valor de poder, de 0,8250. No teste de Koziol (1982), o menor valor de poder foi de 0,8260. O teste de assimetria de Mardia (1970), o teste de Royston (1983) e o teste de Henze e Zirkler (1990) obtiveram valor de poder de pelo menos 0,9800 em todas as situações avaliadas.

Na Tabela 7 - Anexo são dispostos os valores de poder dos testes TKS, TBPb, TEM e TSW, considerando a distribuição uniforme multivariada em função das combinações de n e p, para o nível de significância $\alpha = 5\%$. De uma maneira geral, pode-se observar que os três testes baseados em amostras betas apresentaram um poder muito baixo, com destaque negativo para o teste TEM, que para a maioria das combinações teve poder muito próximo de zero, salvo para as combinações de $n = 200$ com $p = 50$, $p = 100$ e $p = 150$ e de $n = 1000$ e $p = 5$ em que o poder foi satisfatório. Os testes TKS, TBPb e TEM se mostraram com poderes muito baixo para a maioria das combinações de n e p e o TSW, superior aos demais, com poder de 100% na maioria das situações, a partir da combinação de $n = 50$ com $p = 10$ e valores de poder menores, ainda que superior aos demais, quando $n \leq 20$.

O teste Monte Carlo de normalidade multivariada proposto e avaliado por

Biase (2011) mostrou melhor desempenho que o teste qui-quadrado de Pearson multivariado e o teste conjunto de assimetria e curtose multivariado avaliados por Oliveira e Ferreira (2009) para todos os números de variáveis quando $n = 10$ e $n = 20$ e, para a maioria dos números de variáveis, quando $n = 100$.

Nas avaliações de poder realizadas por Mecklin e Mundfrom (2005), o teste clássico de Singh (1993) teve valor de poder mais baixo de 0,1350, considerando a distribuição uniforme multivariada, no nível nominal de significância de 5%. O teste de Henze e Zirkler (1990) e o teste de Royston (1983) foram relativamente poderosos, mas tiveram valor de poder de 0,4000 quando $n = 25$ com $p = 5$, enquanto no teste de curtose de Mardia (1970) os valores do poder variaram de 0,8900 a 1,0000 e os testes de Koziol (1982) e Paulson *et al.* (1987) apresentaram valor de poder mínimo de 0,9980.

Na Tabela 8 - Anexo são apresentados os valores de poder dos testes TKS, TBPb, TEM e TSW no nível de significância nominal $\alpha = 5\%$ para as combinações de n e p, considerando a distribuição normal contaminada multivariada. O teste TKS foi o que apresentou pior desempenho dentre os testes, com poder inferior em todas as combinações de n e p, exceto os casos em que $n = 200$ com $p = 100$ e $p = 150$. Inclusive, para $n = 500$ e $n = 1000$ com $p = 5$, o poder do teste foi igual a zero.

O teste TBPb apresentou desempenho um pouco superior em relação ao TKS, obtendo maiores valores de poder na maioria das combinações de n e p. No entanto, o melhor desempenho de poder ocorreu nas situações em que o tamanho da amostra n foi igual a 200.

Já o teste TEM apresentou algumas peculiaridades. Para $n \leq 20$, o poder do teste apresentou valores muito baixos. Para $n > 50$ o teste apresenta menor poder quando $p = 2$ e quando p se aproximou de n. Para os tamanhos da amostra, p, "intermediários", o teste apresentou valores de poder elevados, sendo de 100% ou próximo desse valor na maioria das combinações.

Novamente, o teste TSW foi superior em relação aos demais testes, apresentando um poder elevado para combinações de $n \geq 20$. Mesmo que, para $n = 10$, o poder tenha sido inferior, o desempenho desse teste ainda superou o dos demais, considerando a distribuição uniforme multivariada.

Mecklin e Mundfrom (2005), em suas comparações de poder de testes, utilizaram 15 configurações diferentes para a distribuição normal contaminada multivariada e todos os testes avaliados tiveram baixo poder em todas as situações. Isso, de acordo com os autores, se deve ao fato de os vetores de média das distribuições normais contaminadas utilizadas serem iguais ou pouco distintos.

O teste conjunto de simetria e curtose multivariado avaliado por Oliveira e Ferreira (2009) apresentou baixos valores de poder para amostras de tamanho pequeno e para quando p se aproxima de n o poder foi nulo. O teste qui-quadrado de Pearson multivariado proposto por Oliveira e Ferreira (2009) também apresentou valores de poder reduzidos para amostras pequenas e, quando p se aproximou de n o desempenho de poder também foi afetado, embora tenha sido melhor que do teste conjunto de simetria e curtose multivariado.

O teste Monte Carlo de normalidade multivariada baseado em distâncias, proposto por Biase (2011), apresentou melhor desempenho de poder do que o teste conjunto de simetria e curtose multivariado avaliado por Oliveira e Ferreira (2009), para amostras $n = 10$ e $n = 20$. E, também, em relação ao teste qui-quadrado de Pearson multivariado de Oliveira e Ferreira (2009), exceto para $p = 8$ e $p = 18$. Para $n = 200$ com $p = 2$ e $p = 10$, o teste de Biase (2011) apresentou menor valor de poder do que ambos os testes avaliados por Oliveira e Ferreira (2009). Já o teste de normalidade multivariada baseado em *bootstrap* paramétrico proposto por Biase (2011) superou os testes avaliados por Oliveira e Ferreira (2009) e os testes avaliados na Tabela 8 - Anexo, na maioria das situações.

3.3 Aplicação

Os testes foram aplicados nos dados de Royston (1983). Considerando o nível de significância de 5%, os testes TKS e TBPb não rejeitaram a hipótese de normalidade dos dados, em conformidade com os testes TEM e TSW. Os resultados do valor-p e das estatísticas dos testes são apresentados na Tabela 2 - Anexo.

4 Considerações gerais

De modo geral, o TKS e o TBPb apresentaram valores de poder baixos, considerando as distribuições não normais utilizadas, sendo que o TBPb apresentou um desempenho minimamente superior ao TKS. Ambos os testes obtiveram o pior desempenho quando p se aproxima de n e o melhor desempenho quando o tamanho da amostra é grande, exceto para as distribuições: normal contaminada multivariada e uniforme multivariada.

Um fator que interferiu nos valores de poder foi o tamanho da amostra efetiva $(n - p - 1)$, ou seja, o tamanho da amostra depois de serem feitas as devidas transformações envolvidas no TKS e no TBPb. Nota-se que o pior desempenho de poder do TKS ocorre quando o tamanho da amostra efetiva é muito reduzido (casos em que n é pequeno ou que p se aproxima de n). Embora o TBPb tenha sido menos afetado pelo tamanho da amostra efetiva do que o TKS, o seu desempenho de poder também reduziu em alguns casos de amostra efetiva pequena, como, por exemplo, em $n = 50$ com $p = 47$, cuja amostra efetiva é de tamanho 2.

Outro fator que pode ter prejudicado o desempenho do poder do TBPb é o fato de que a construção desse teste não levou em consideração os parâmetros da distribuição beta. Após as transformações são obtidas $p - 1$ amostras betas, cada uma com sua parametrização. Quando se utiliza o máximo da estatística de Kolmogorov-Smirnov, não se pode garantir que ele será proveniente sempre da amostra cuja distribuição beta tenha os mesmos parâmetros para cada amostra *bootstrap*.

O TEM apresentou melhor desempenho para tamanhos grandes de amostra, exceto quando o p se aproxima de n. Inclusive, para a distribuição *t-Student* com $\nu = 30$ graus de liberdade, quando $n > 200$ o poder foi próximo ou igual a 100%.

No entanto, o teste foi muito conservativo e apresentou valores de poder muito pequenos para amostra de tamanho reduzido.

O TSW superou os demais testes em desempenho de poder e foi o teste que mais obteve valores de poder de 100%. Apesar de não ter mostrado poder elevado no caso da distribuição *t-Student* com $\nu = 30$ graus de liberdade, foi o único que apresentou melhores resultados de poder para a distribuição uniforme multivariada. Sendo assim, pode ser considerado o teste mais poderoso nas comparações com o TKS, o TBPb e o TEM.

Comparando com outros testes existentes na literatura, o teste de normalidade multivariada baseado em *bootstrap* paramétrico proposto por Biase (2011) é uma alternativa ao uso do TSW, uma vez que apresentou um bom controle da taxa de erro tipo I, mostrando-se um teste exato e teve desempenho de poder equivalente e, em alguns casos, superior ao TSW. Uma importante vantagem dos testes propostos por Biase (2011) é a de que o TSW tem a limitação de poder ser aplicado somente em amostras de tamanho $n = 3$ a $n = 5000$, o que não ocorre com ambos os testes de Biase (2011). Além disso, os dois testes propostos e avaliados por Biase (2011) podem ser aplicados tanto em casos que $n > p$, quanto nas situações em que $n \leq p$. Por fim, os testes propostos por Biase (2011) apresentaram, de modo geral, melhor desempenho de poder do que o teste qui-quadrado de Pearson multivariado e o teste conjunto de simetria e curtose multivariado avaliados por Oliveira e Ferreira (2009).

Por outro lado, temos o estudo realizado por Mecklin e Mundfrom (2005), que recomendou o uso do teste de Henze e Zirkler (1990), de acordo com as avaliações de erro tipo I e de poder que realizaram. A recomendação dos autores se baseou no fato de o teste de Henze e Zirkler (1990) possuir uma facilidade de uso comparado aos outros testes e bons resultados nas simulações Monte Carlo, obtendo o melhor desempenho de poder considerando as distribuições não normais testadas. A ressalva foi de que o teste de Henze e Zirkler (1990) não ajuda a diagnosticar a razão da não normalidade, por isso, em caso de rejeição da hipótese de normalidade multivariada, os autores sugerem que a análise seja complementada com procedimentos gráficos e medidas de assimetria e curtose tais como as de Mardia (1970). Quanto ao teste de Royston (1983), Mecklin e Mundfrom (2005) apontaram que, apesar de ter apresentado bom desempenho de poder e controle da taxa de erro tipo I, sujeita-se a ter desempenho de poder ruim quando as variáveis são altamente correlacionadas ($\rho > 0,9$).

Outro estudo que se pode destacar foi realizado por Farrell, Salibian Barrera e Naczk (2007), que avaliaram empiricamente o desempenho dos testes de Royston (1983), Royston (1992), Henze e Zirkler (1990) e Doornik e Hansen (2008), considerando 10.000 simulações Monte Carlo, ao nível de significância $\alpha = 0,05$ e combinações de $n = 25$, $n = 50$, $n = 75$, $n = 100$ e $n = 250$, com $p = 2$, $p = 3$, $p = 4$, $p = 5$ e $p = 10$. As distribuições *t-Student* multivariada com 10 graus de liberdade, uniforme multivariada, Pearson Tipo II com m = 10 e Knintchine foram utilizadas para a avaliação do poder.

Os autores constataram que o teste de Royston (1983) não apresentou bom controle da taxa de erro tipo I, sendo muito conservativo para todas as combinações de n e p. Portanto, não recomendaram seu uso. O teste de Royston (1992) e o teste Doornik e Hansen (2008) obtiveram bom controle das taxas de erro tipo I para todas as combinações de n e p. Em contrapartida, o teste de Henze e Zirkler (1990) se mostrou conservativo para os casos em que $n = 25$. Não houve um teste uniformemente mais poderoso. O teste de Royston (1992) obteve melhor desempenho de poder para amostras de tamanho $n = 25$, o teste de Doornik e Hansen (2008) se destacou para a situação em que a distribuição amostrada foi *t-Student* multivariada com 10 graus de liberdade e, de maneira geral, o teste de Henze e Zirkler (1990) apresentou bom desempenho de poder, especialmente, quando $n \geq 75$.

Conclusões

Os dois testes de normalidade multivariada foram propostos e implementados no programa R. A avaliação do desempenho dos testes propostos, utilizando simulação Monte Carlo, foi realizada conforme estabelecido, exceto para o TBPb nas combinações $n = 500$ e $n = 1000$ com $p = 5$, cujo tempo de execução das simulações se mostrou demasiadamente longo.

O TKS apresentou bom controle das taxas de erro tipo I, sendo um teste exato. Porém, em relação ao poder, esse teste não obteve bom desempenho. O TBPb teve sucesso no controle das taxas de erro tipo I. No entanto, não apresentou desempenho de poder satisfatório, se mostrando fraco para detectar a não normalidade multivariada na maioria das situações.

Assim, embora o TKS e o TBPb tenham obtido um bom controle das taxas de erro tipo I, mostrando-se exatos, não é recomendado, em hipótese alguma, o uso desses testes, devido ao fraco desempenho de poder apresentado por eles. Do mesmo modo, não é recomendado, em nenhuma situação, o TEM, pois, além de ter apresentado um fraco desempenho de poder, foi considerado um teste conservativo.

Diante das comparações com outros testes da literatura, destacam-se o teste de normalidade multivariada baseado em *bootstrap* paramétrico proposto por Biase (2011), o teste de Royston (1992) e o teste de Henze e Zirkler (1990) como as melhores alternativas para testar a normalidade multivariada. O teste de Biase (2011) e o teste de Henze e Zirkler (1990) ainda não foram comparados sobre as mesmas condições, isto é, considerando o mesmo número de simulações Monte Carlo e as mesmas combinações de n e p. Portanto, não se pode recomendar o uso de um que tenha melhor desempenho de poder e melhor controle da taxa de erro tipo I em relação ao outro.

Agradecimentos

Agradecemos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) pelo apoio financeiro.

CINTRA, R. A.; FERREIRA, D. F. New multivariate normality tests based on independent beta samples. *Rev. Bras. Biom.,* Lavras, v.35, n.4, p.670-700, 2017.

- *ABSTRACT: Embrechts, Frey and McNeil (2005) proposed a test based on Kolmogorov-Smirnov test using concepts from Gnanadesikan and Kettenring (1972) that it is possible to obtain beta samples from normal samples using a transformation in the Mahalanobis quadratic distance. However, this test is influenced by the sample dependence present in the quadratic distance. Liang, Pan and Yang (2004) presented a way to obtain univariate beta samples, each independent and identically distributed, through transformations in a p-variate normal sample. This work aimed to propose two tests for multivariate normality: a goodness-of-fit test based on Kolmogorov-Smirnov test and an intensive test based on parametric bootstrap. Monte Carlo simulations were used in order to estimate type I error rates and the power of the tests. Comparisons were conducted between the proposed tests and the multivariate normality test that was presented in the literature. Although the proposed tests have obtained good control of the type I error rates, the use of these tests was not recommended due to the poor performance of power presented by them.*

- *KEYWORDS: Beta distribution; parametric bootstrap; Kolmogorov-Smirnov; R software.*

Referências

BIASE, A. G. *Proposição de testes computacionalmente intensivos de normalidade multivariada*. 2011. 124 p. Tese (Doutorado em Estatística e Experimentação Agropecuária), Departamento de Ciências Exatas, Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2011.

CIRILLO, M. A.; FERREIRA, D. F. Extensão do teste para normalidade univariado baseado no coeficiente de correlação quantil-quantil para o caso multivariado. *Revista de Matemática e Estatística*, São Paulo, v.21, n.3, p.57-75, 2003.

DOORNIK, J. A.; HANSEN, H. An Omnibus test for univariate and multivariate normality. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, New York, v.70, n.1, p.927-939, 2008.

EMBRECHTS, P.; FREY, R.; MCNEIL, A. *Quantitative risk management.* Princeton: Princeton University Press, 2005. 538p.

FARRELL, P. J.; SALIBIAN-BARRERA, M.; NACZK, K. On tests for multivariate normality and associated simulation studies. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, New York, v.77, n.12, p.1065-1080, 2007.

FERREIRA, D. F. *Estatística multivariada.* 2ed. Lavras, MG: Editora UFLA, 2011. 675p.

GENZ, A.; BRETZ, F.; MIWA, T; MI, X.; LEISCH, F.; SCHEIPL, F.; HOTHORN, T. *mvtnorm: Multivariate Normal and t Distributions.* 2016. R package version 1.0-5. URL: http://CRAN.R-project.org/package=mvtnorm

GNANADESIKAN, R.; KETTENRING, J. R. Robust estimates, residuals, and outlier detection with multiresponse data. *Biometrics*, Washington, v.28, n.1, p.81-124, 1972.

HAWKINS, D. M. A new test for multivariate normality and homoscedasticity. *Technometrics*, Abingdon, v.23, n.1, p.105-110, 1981.

HENZE, N.; ZIRKLER, B. A class of invariant consistent tests for multivariate normality. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, Abingdon, v.19, n.10, p.3595-3617, 1990.

KOZIOL, J. A. A class of invariant procedures for assessing multivariate normality. *Biometrika*, Oxford, v.69, n.2, p.423-427, 1982.

LI, R.-Z.; FANG, K.-T.; ZHU, L.-X. Some qq probability plots to test spherical and elliptical symmetry. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, Abingdon, v.6, n.4, p.435-450, 1997.

LIANG, J.; PAN, W. S.; YANG, Z.-H. Characterization-based q-q plots for testing multinormality. *Statistics & Probability Letters*, Amsterdam, v.70, n.3, p.183-190, 2004.

MARDIA, K. V. Measures of multivariate skewness and kurtosis with applications. *Biometrika*, Oxford, v.57, n.3, p.519-530, 1970.

MARDIA, K. V.; FOSTER, K. Omnibus tests of multinormality based on skewness and kurtosis. *Communications in Statistics-theory and methods*, Abingdon, v.12, n.2, p.207-221, 1983.

MARDIA, K. V.; KENT, J. Rao score tests for goodness of fit and independence. *Biometrika*, Oxford, v.78, n.2, p.355-363, 1991.

MECKLIN, C. J.; MUNDFROM, D. J. A Monte Carlo comparison of the type I and type II error rates of tests of multivariate normality. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, Abingdon, v.75, n.2, p.93-107, 2005.

MUDHOLKAR, G. S.; SRIVASTAVA, D. K.; LIN, C. T. Some p-variate adaptations of the shapiro-wilk test of normality. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, Abingdon, v.24, n.4, p.953-985, 1995.

OLIVEIRA, I. R. C.; FERREIRA, D. F. Multivariate extension of chi-squared univariate normality test. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, Abingdon, v.80, n.5, p.513-526, 2009.

PAULSON, A.; ROOHAN, P.; SULLO, P. Some empirical distribution function tests for multivariate normality. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, Abingdon, v 28, n.1, p.15-30, 1987.

R CORE TEAM. *R: A Language and Environment for Statistical Computing.* Vienna, Austria, 2016. Disponível em: http://www.R-project.org/. Acesso em: 21 jul. 2016.

ROMEU, J. L.; OZTURK, A. A comparative study of goodness-of-fit tests for multivariate normality. *Journal of Multivariate Analysis*, Amsterdam, v.46, n.2, p.309-334, 1993.

ROYSTON, J. Some techniques for assessing multivarate normality based on the Shapiro-Wilk W. *Applied Statistics*, London, v.32, n.2, p.121-133, 1983.

ROYSTON, P.Approximating the Shapiro-Wilk W-test for non-normality. *Statistics and Computing*, London, v.2, n.3, p.117-119, 1992.

SILVA, R. B. V. *Extensão do teste de normalidade de Shapiro-Francia para o caso multivariado*. 2009. 59 p. Tese (Doutorado em Estatística e Experimentação Agropecuária), Departamento de Ciências Exatas, Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2009.

SINGH, A. Omnibus robust procedures for assessment of multivariate normality and detection of multivariate outliers. In PATIL, G. P.; RAO, C. R. (Ed.) *Multivariate Environmental Statistics*, North Holland, p.445-488, 1993.

VENABLES, W. N.; Ripley, B. D. *Modern Applied Statistics with S*. 4.ed. New York: Springer, 2002.

YANG, Z. -H.; FANG, K. -T.; LIANG, J. -J.A characterization of multivariate normal distribution and its application. *Statistics & Probability Letters*, Amsterdam, v.30, n.4, p.347-352, 1996.

Recebido em 29.06.2016.

Aprovado após revisão em 04.01.2017.

APÊNDICE

APÊNDICE A: Implementação da rotina do teste de normalidade multivariada baseado na obtenção de amostras betas utilizando o teste de Kolmogorov-Smirnov (TKS), em que x é a matriz de dados (n x p)

```
# Função que obtem os Ui, com i = 1, ..., n - 1.
U <- function(x)
{
n <- nrow(x)
i <- 1:(n-1)
U <- (apply(x,2,cumsum)[i,] - i * x[2:n,]) / sqrt(i * (i+1))
return(U)
}

# Função que obtem os Sk, com k = p + 1, ..., n - 1.
Sk <- function(x)
{
n      <- nrow(x)
p      <- ncol(x)
u      <- U(x)
S      <- array(NA, dim=c(p,p,(n-1-p)))
S[,,1] <- u[1,] %*% t(u[1,])

for(i in 2:(p+1))
{
S[ , ,1] <- S[, ,1] + (u[i,] %*% t(u[i,]))
}

for(j in 2:(n-1-p))
{
S[,,j] <- S[,,(j-1)] +  (u[(p + j),] %*% t(u[(p + j),]))
}
return(S)
}

# Função que obtem os Yk, com k = p + 1, ..., n - 1.
Yk <- function(x)
{
n      <- nrow(x)
p      <- ncol(x)
u      <- U(x)
sk     <- Sk(x)
yk     <- matrix(NA,n-1-p,p)
```

```
isk    <- array(NA, dim=c(p,p,n-1-p))
for(i in 1:(n-1-p))
{
isk[, , i] <- solve(t(chol(sk[, , i])))
yk[i,]     <- isk[, , i] %*% u[p+i,]
}
return(yk)
}

# Função que obtem as amostras beta
bkq <- function(x)
{
n   <- nrow(x)
p   <- ncol(x)
yk2 <- (Yk(x))^2
if(p==2) B <- as.matrix(yk2[,1] / apply(yk2, 1, sum)) else
B  <- t(apply(yk2[,1:(p-1)],1,cumsum)) / apply(yk2, 1, sum)
return(B)
}

# Teste de normalidade multivariada via Kolmogorov Smirnov
# que testa beta na cauda superior e seleciona a amostra de
# acordo com [p/2].

TKS <- function(x)
{
b          <- bkq(x)
p          <- ncol(x)
qescolhido <- p %/% 2
KS         <- ks.test(b[,qescolhido], "pbeta", qescolhido/2,
 (p - qescolhido)/2, alternative = "greater")
return(KS)
}
```

APÊNDICE B: Implementação da rotina do teste bootstrap paramétrico de normalidade multivariada baseado na obtenção de amostras betas (TBPb), em que x é a matriz de dados (n x p)

```
# Função que obtem os Ui, com i = 1, ..., n - 1.
U <- function(x)
{
n <- nrow(x)
i <- 1:(n-1)
U <- (apply(x,2,cumsum)[i,] - i * x[2:n,]) / sqrt(i * (i+1))
```

```
return(U)
}

# Função que obtem os Sk, com k = p + 1, ..., n - 1.
Sk <- function(x)
{
n      <- nrow(x)
p      <- ncol(x)
S      <- array(NA, dim=c(p,p,(n-p)))
S[,,1] <- x[1,] %*% t(x[1,])

for(i in 2:(p+1))
{
S[ , ,1] <- S[, ,1] + (x[i,] %*% t(x[i,]))
}

for(j in 2:(n-p))
{
S[,,j] <- S[,,(j-1)] +  (x[(p + j),] %*% t(x[(p + j),]))
}
return(S)
}

# Função que obtem os Yk, com k = p + 1, ..., n - 1.
Yk <- function(x)
{
n      <- nrow(x)
p      <- ncol(x)
sk     <- Sk(x)
yk <- matrix(NA,n-p,p)
for(i in 1:(n-p))
{
yk[i,] <- solve(t(chol(sk[, , i]))) %*% x[p+i,]
}
return(yk)
}

# Função que obtem as amostras beta
bkq <- function(x)
{
n  <- nrow(x)
p  <- ncol(x)
yk2 <- (Yk(x))^2
if(p==2) B <- as.matrix(yk2[,1] / apply(yk2, 1, sum)) else
```

```
B  <- t(apply(yk2[,1:(p-1)],1,cumsum)) / apply(yk2, 1, sum)
return(B)
}

# Função que obtem o máximo das estatísticas de Kolmogorov-Smirnov
Dmax <- function(x)
{
p  <- ncol(x)
b  <- bkq(x)
q  <- ncol(b)
D  <- c()
for(i in 1:q)
{
D[i] <- ks.test(b[,i],"pbeta", i/2, (p-i)/2)$statistic
}
return(max(D))
}

# Teste bootstrap paramétrico de normalidade
# multivariada baseado nas amostras betas

TBPb <- function(x, Nb = 2000)
{
library(mvtnorm)
u  <- U(x)
D0 <- Dmax(u)
S  <- var(u)
n  <- nrow(u)
p  <- ncol(u)
mu <- rep(0,p)
D  <- NULL
for(i in 1:Nb)
{
y    <- rmvnorm(n, mu, S)
D[i] <- Dmax(y)
}
D <- c(D,D0)
PVAL <- length(D[D>=D0]) /  (Nb + 1)
return(list(p.value = PVAL, D0 = D0))
}
```

ANEXO

Tabela 1 - Combinações de n e p utilizadas nas simulações Monte Carlo

Testes de normalidade multivariada	n	p
TKS, TBPb, TEM e TSW	10	2, 5, 7
TKS, TBPb, TEM e TSW	20	2, 5, 10, 17
TKS, TBPb, TEM e TSW	50	2, 10, 25, 47
TKS, TBPb, TEM e TSW	100	2, 10, 50, 97
TKS, TBPb, TEM e TSW	200	2, 10, 50, 100, 150, 197
TKS, TEM e TSW	500	5
TKS, TEM e TSW	1000	5

Tabela 2 - Valor-p e estatísticas de TKS, TBPb, TEM e TSW, considerando $\alpha =$ 5%, para dados Royston (1983), referente à concentração de hemoglobina e contagem de linfócitos

Teste	Estatística do teste	Valor-p
TKS	0,2316	0,1384
TBPb	0,2316	0,2789
TEM	0,1052	0,6010
TSW	0,9707	0,8345

Tabela 3 - Erro tipo I dos testes TKS, TBPb, TEM e TSW, considerando $\alpha = 5\%$

n	p	TKS	TBPb	TEM	TSW
10	2	0,0530	0,0570	0,0080$^-$	0,0490
	5	0,0450	0,0500	0,0000$^-$	0,0470
	7	0,0555	0,0555	0,0010$^-$	0,0400
20	2	0,0525	0,0530	0,0095$^-$	0,0500
	5	0,0530	0,0515	0,0045$^-$	0,0530
	10	0,0465	0,0485	0,0000$^-$	0,0445
	17	0,0445	0,0520	0,0040$^-$	0,0390
50	2	0,0635	0,0560	0,0075$^-$	0,0505
	10	0,0510	0,0495	0,0020$^-$	0,0410
	25	0,0530	0,0550	0,0015$^-$	0,0550
	47	0,0530	0,0510	0,0080$^-$	0,0425
100	2	0,0555	0,0560	0,0110$^-$	0,0500
	10	0,0515	0,0505	0,0020$^-$	0,0490
	50	0,0445	0,0515	0,0025$^-$	0,0365$^-$
	97	0,0510	0,0545	0,0080$^-$	0,0410
200	2	0,0460	0,0455	0,0115$^-$	0,0490
	10	0,0495	0,0450	0,0010$^-$	0,0490
	50	0,0465	0,0530	0,0005$^-$	0,0475
	100	0,0490	0,0540	0,0005$^-$	0,0380$^-$
	150	0,0560	-	0,0015$^-$	0,0455
	197	0,0515	-	0,0070$^-$	0,0470
500	5	0,0375$^-$	-	0,0035$^-$	0,0590
1000	5	0,0490	-	0,0015$^-$	0,0485

$^+$ Taxas de erro tipo I superiores ao valor nominal de 5% de significância (valor-$p < 0,01$).

$^-$ Taxas de erro tipo I inferiores ao valor nominal de 5% de significância (valor-$p < 0,01$).

Tabela 4 - Poder dos testes TKS, TBPb, TEM e TSW, considerando a distribuição *t-Student* multivariada com $\nu = 1$ grau de liberdade em função de n e p para $\alpha = 5\%$

n	p	TKS	TBPb	TEM	TSW
10	2	0,1055	0,0860	0,4095	0,6935
	5	0,1740	0,1560	0,0420	0,8165
	7	0,1715	0,1940	0,0000	0,8485
20	2	0,1815	0,1660	0,9130	0,9415
	5	0,3700	0,3610	0,9425	0,9845
	10	0,3845	0,4865	0,6640	0,9935
	17	0,2265	0,4090	0,0000	0,9965
50	2	0,3385	0,3620	1,0000	0,9995
	10	0,9015	0,9405	1,0000	1,0000
	25	0,9465	0,9865	1,0000	1,0000
	47	0,2410	0,0445	0,0000	1,0000
100	2	0,4810	0,5485	1,0000	1,0000
	10	0,9875	0,9980	1,0000	1,0000
	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	97	0,2630	-	0,0000	1,0000
200	2	0,5820	0,6860	1,0000	1,0000
	10	0,9985	1,0000	1,0000	1,0000
	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	100	1,0000	-	1,0000	1,0000
	150	1,0000	-	1,0000	1,0000
	197	0,2515	-	-	1,0000
500	5	0,9580	-	1,0000	1,0000
1000	5	0,9665	-	1,0000	1,0000

Tabela 5 - Poder dos testes TKS, TBPb, TEM e TSW, considerando a distribuição *t-Student* multivariada com $\nu = 30$ graus de liberdade em função de n e p para $\alpha = 5\%$

n	p	TKS	TBPb	TEM	TSW
10	2	0,0545	0,0470	0,0075	0,0625
	5	0,0470	0,0585	0,0010	0,0580
	7	0,0495	0,0525	0,0020	0,0555
20	2	0,0535	0,0485	0,0110	0,0775
	5	0,0525	0,0510	0,0080	0,0685
	10	0,0540	0,0545	0,0005	0,0705
	17	0,0595	0,0585	0,0035	0,0680
50	2	0,0545	0,0525	0,0160	0,0875
	10	0,0605	0,0450	0,0290	0,1115
	25	0,0735	0,0600	0,0145	0,1425
	47	0,0765	0,0505	0,0055	0,1630
100	2	0,0550	0,0640	0,0280	0,0865
	10	0,0650	0,0580	0,0840	0,1565
	50	0,0940	0,0620	0,2185	0,2300
	97	0,0775	0,1085	0,0025	0,2885
200	2	0,0530	0,0485	0,0410	0,1280
	10	0,0660	0,0560	0,2820	0,2090
	50	0,1060	0,0900	0,9915	0,3505
	100	0,2025	0,1545	0,9990	0,3945
	150	0,2830	-	0,8490	0,4265
	197	0,0845	-	0,0025	0,4455
500	5	0,0575	-	0,3060	0,2700
1000	5	0,0590	-	0,6790	0,4485

Tabela 6 - Poder dos testes TKS, TBPb, TEM e TSW, considerando a distribuição log-normal multivariada em função de n e p para $\alpha = 5\%$

n	p	TKS	TBPb	TEM	TSW
10	2	0,0550	0,0575	0,2165	0,7980
	5	0,0840	0,0860	0,0295	0,9685
	7	0,1215	0,1175	0,0000	0,9870
20	2	0,0715	0,1270	0,6805	0,9920
	5	0,1400	0,1300	0,8395	1,0000
	10	0,2115	0,2275	0,5505	1,0000
	17	0,1965	0,2900	0,0000	1,0000
50	2	0,1060	0,2645	0,9920	1,0000
	10	0,3495	0,3800	1,0000	1,0000
	25	0,7415	0,8185	1,0000	1,0000
	47	0,1880	0,2330	0,0000	1,0000
100	2	0,1330	0,3955	1,0000	1,0000
	10	0,4035	0,6135	1,0000	1,0000
	50	0,9970	1,0000	1,0000	1,0000
	97	0,2070	0,6810	0,0005	1,0000
200	2	0,2045	0,5915	1,0000	1,0000
	10	0,4720	0,9210	1,0000	1,0000
	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	100	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	150	1,0000	-	1,0000	1,0000
	197	0,2315	-	0,0005	1,0000
500	5	0,1020	-	1,0000	1,0000
1000	5	0,1140	-	1,0000	1,0000

Tabela 7 - Poder dos testes TKS, TBPb, TEM e TSW, considerando a distribuição uniforme multivariada em função de n e p para $\alpha = 5\%$

n	p	TKS	TBPb	TEM	TSW
10	2	0,0340	0,0425	0,0010	0,0920
	5	0,0290	0,0410	0,0005	0,1270
	7	0,0255	0,0305	0,0030	0,1480
20	2	0,0290	0,0455	0,0000	0,2840
	5	0,0200	0,0475	0,0015	0,5110
	10	0,0420	0,0425	0,0005	0,7320
	17	0,0410	0,0340	0,0055	0,8730
50	2	0,0185	0,0455	0,0005	0,9285
	10	0,0265	0,0905	0,0015	1,0000
	25	0,0475	0,0850	0,0020	1,0000
	47	0,0540	0,0265	0,030	1,0000
100	2	0,0215	0,0685	0,0145	1,0000
	10	0,0130	0,2240	0,0015	1,0000
	50	0,0510	0,1385	0,1555	1,0000
	97	0,0655	0,0920	0,0005	1,0000
200	2	0,0235	0,1265	0,3190	1,0000
	10	0,0060	0,5845	0,0005	1,0000
	50	0,0375	0,5650	0,9095	1,0000
	100	0,0860	0,3670	0,9900	1,0000
	150	0,1510	-	0,8650	1,0000
	197	0,0715	-	0,0000	1,0000
500	5	0,0060	-	0,2490	1,0000
1000	5	0,0085	-	0,8565	1,0000

Tabela 8 - Poder dos testes TKS, TBPb, TEM e TSW, considerando a distribuição normal contaminada multivariada em função de n e p para $\alpha = 5\%$

n	p	TKS	TBPb	TEM	TSW
10	2	0,0255	0,0570	0,0055	0,2645
	5	0,0455	0,0635	0,0065	0,3330
	7	0,0475	0,0615	0,0005	0,3395
20	2	0,0130	0,0910	0,0075	0,6665
	5	0,0205	0,0955	0,1115	0,7970
	10	0,0565	0,0700	0,1955	0,8770
	17	0,1070	0,1255	0,0005	0,8985
50	2	0,0070	0,2240	0,0160	0,9945
	10	0,0145	0,2835	0,8505	1,0000
	25	0,1805	0,1625	0,9735	1,0000
	47	0,1045	0,0505	0,0000	1,0000
100	2	0,0040	0,4165	0,0590	1,0000
	10	0,0035	0,8155	0,9905	1,0000
	50	0,6865	0,5135	1,0000	1,0000
	97	0,1030	0,5165	0,0005	1,0000
200	2	0,0015	0,7255	0,2860	1,0000
	10	0,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	50	0,4200	0,9225	1,0000	1,0000
	100	0,9995	0,9960	1,0000	1,0000
	150	0,9755	-	1,0000	1,0000
	197	0,0890	-	0,0085	1,0000
500	5	0,0000	-	1,0000	1,0000
1000	5	0,0000	-	1,0000	1,0000