

AVALIAÇÃO DE ESTIMADORES EQUIVARIANTES E DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA EM EVENTOS DE PRECIPITAÇÃO MÁXIMA

Carlos José dos REIS¹
Lucas Monteiro CHAVES²
Devanil Jaques de SOUZA¹

- RESUMO: Uma variável climática de grande interesse na análise de seu comportamento é a precipitação pluviométrica, uma vez que diversas atividades econômicas e processos ambientais são altamente dependentes dessa variável. Diante disso, objetivou-se no presente trabalho: *i*) verificar o ajuste da distribuição Exponencial aos dados de precipitação máxima em Piracicaba-SP, nos meses de outubro a março, *ii*) calcular as precipitações máximas esperadas para os tempos de retorno de 10, 30, 50, 70 e 100 anos nesses meses, utilizando estimadores equivariantes e de máxima verossimilhança, *iii*) comparar a distribuição Exponencial ajustada com estimadores equivariantes (Exponencial_E) e de máxima verossimilhança (Exponencial_{MV}), selecionando para cada mês a distribuição que forneça resultados de maior acurácia. Os dados de precipitação máxima (1917-2015) foram obtidos junto à estação convencional do posto agrometeorológico da Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz” (ESALQ/USP). As distribuições Exponencial_E e Exponencial_{MV} ajustaram-se aos dados em todos os meses. A distribuição Exponencial_E mostrou-se mais adequada para modelar os dados de precipitação máxima nos meses de novembro e dezembro. Nos demais meses, a distribuição Exponencial_{MV} apresentou melhor desempenho.
- PALAVRAS-CHAVE: Valores extremos; distribuição Exponencial; tempos de retorno; planejamento.

¹Universidade Federal de Lavras - UFLA, Departamento de Estatística, CEP: 37200-000, Lavras, MG, Brasil. E-mail: carlosjreis17@yahoo.com.br; devaniljaques@des.ufla.br

²Universidade Federal de Lavras - UFLA, Departamento de Ciências Exatas, CEP: 37200-000, Lavras, MG, Brasil. E-mail: lucas@dex.ufla.br

1 Introdução

A ocorrência de eventos climáticos extremos severos tem chamado a atenção da sociedade e da comunidade científica, principalmente em função de perdas de vidas humanas e animais, e de ordem econômica. Como eventos climáticos extremos é possível citar fenômenos naturais tais como chuvas intensas, secas prolongadas, vendavais, furacões, marés meteorológicas e temperaturas mínimas ou máximas. O interesse na análise em um dos referidos eventos centra-se tanto na intensidade de sua manifestação quanto na sua duração prolongada. Por apresentarem baixa frequência relativa e elevado impacto, a previsão desses eventos torna-se difícil.

Uma variável climática de grande interesse na análise de seu comportamento é a precipitação pluviométrica, uma vez que diversas atividades econômicas e processos ambientais são altamente dependentes dessa variável. Elevados regimes de precipitação podem ocasionar graves efeitos, como enchentes, deslizamentos de terras, atrasos em colheitas, entre outros. Por outro lado, o déficit de precipitação em larga escala, muitas vezes, causa efeitos adversos sobre atividades como agricultura, silvicultura, produção hidrelétrica, ecossistemas alagados (manguezais) e a vida selvagem em geral (MARENGO et al., 2010).

A ocorrência de eventos climáticos relacionados à precipitação pluviométrica tem demonstrado a vulnerabilidade do Brasil em relação a anomalias com essa variável climática. O baixo índice de chuvas durante o verão e o outono de 2001 culminou com uma redução significativa da vazão dos rios brasileiros, afetando a produção de energia hidrelétrica. Esse cenário impeliu o governo a tomar medidas visando a conservação de energia durante os anos de 2001 e 2002, para impedir a interrupção total do fornecimento (blackout).

Anomalias no regime de precipitação no sudoeste da amazônia foram presenciadas em 2005, culminando em uma das secas mais severas dos últimos cem anos na região. A navegação em rios como o Amazonas, o Solimões e o rio Madeira foi prejudicada, afetando a população ribeirinha. Países como o Brasil, a Bolívia, o Peru e a Colômbia declararam estado de calamidade pública em setembro de 2005. Devido à baixa umidade do ar, estima-se que o número de incêndios florestais em 2005 foi cerca de 300% maior do que em 2004. Como consequência, a fumaça originada dos incêndios afetou o tráfego aéreo, escolas e empresas foram fechadas, e muitas pessoas foram atendidas nos hospitais devido a inalação da fumaça (MARENGO *et al.*, 2008).

Vários municípios dos estados de Santa Catarina, do Rio de Janeiro e de Minas Gerais vieram a decretar estado de calamidade devido a fortes chuvas ocorridas nos meses de novembro e dezembro de 2008. Essas chuvas fortes causaram a destruição total de muitas casas, deixando milhares de pessoas desabrigadas e centenas de mortos. Os prejuízos causados por esse evento pluvial extremo no sul do país, pelas subseqüentes enchentes e deslizamentos, foram estimados em 350 milhões de dólares, principalmente pelo fechamento do Porto de Paranaguá (MARENGO *et al.*, 2010).

As fortes chuvas ocorridas em janeiro de 2011, na região serrana do estado do Rio de Janeiro, ocasionaram inundações e deslizamentos de terra, deixando

aproximadamente 14 mil pessoas desabrigadas, além de ocasionar a morte de pessoas e animais. Os anos de 2014 e 2015 foram marcados pelo baixo regime de chuvas em quase todo país. Nesses dois anos, o verão foi anormalmente seco e quente. Os níveis dos reservatórios de algumas usinas hidrelétricas atingiram níveis mínimos críticos, sendo necessário, em alguns casos, a utilização do chamado “volume morto”, para atender a demanda exigida. Um fato ainda mais preocupante nesse período foi a carência de água potável para atender o consumo humano. Em alguns municípios foi necessário a determinação de períodos em que a população teria acesso a água. O fim da primavera de 2015 e o início do verão de 2016 na região sul do Brasil têm sido marcados por chuvas e enchentes intensas, o que tem gerado prejuízos econômicos. A ocorrência desses eventos atípicos no sul do Brasil tem sido associado ao fenômeno *El Niño*, que corresponde a um superaquecimento das águas do oceano Pacífico.

Devido a carência de estudos sobre precipitações máximas no município de Piracicaba-SP utilizando as distribuições de valores extremos que se originam da metodologia POT (do inglês *Peaks Over Threshold*) e diante da necessidade do planejamento e do cálculo de riscos de ocorrência de precipitações extremas raras para, por exemplo, atividades como a agricultura nesse município, objetivou-se no presente trabalho: *i*) verificar o ajuste das distribuições Generalizada de Pareto e Exponencial aos dados de precipitação máxima em Piracicaba-SP, nos meses de outubro a março, *ii*) calcular as precipitações máximas esperadas para os tempos de retorno de 10, 30, 50, 70 e 100 anos nesses meses, e *iii*) selecionar para cada mês, a distribuição que forneça resultados de maior acurácia.

1.1 Material e métodos

1.1.1 Dados

Os dados de precipitação pluviométrica (mm) foram obtidos a partir dos registros históricos da Estação Convencional do Posto Agrometeorológico da Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz” (ESALQ/USP, 2015). Os registros históricos compreendem o período de 1917 a 2015, totalizando 99 anos de observações. O clima de Piracicaba, conforme a classificação de Köppen, é do tipo Cwa: tropical de altitude, com chuvas de verão e seca no inverno, sendo os meses de junho, julho e agosto mais secos. A temperatura média do mês mais quente é superior a 22°C e a do mês mais frio não é inferior a 16°C (GHIBERTO e MORAES, 2011).

O município de Piracicaba situa-se entre as coordenadas geográficas de 22°42'30" de latitude Sul e de 47°38'01" de longitude oeste, com uma altitude média de 554 metros. A área total do município é de 1378 km² e a população é estimada em 364.571 habitantes, com aproximadamente 97% na área urbana (IBGE, 2010).

1.1.2 Composição das séries históricas de precipitações máximas mensais

A Teoria de Valores Extremos (TVE) constitui-se de duas metodologias para seleção de valores extremos. Na primeira, um valor extremo, máximo ou mínimo, é definido como a maior ou a menor observação em um determinado bloco. Em análises de valores extremos é comum considerar como blocos, períodos de tempo de interesse, como por exemplo, dias, meses ou anos. Nesse caso, de cada período é extraído o valor máximo (ou mínimo) que constituíra a amostra de valores extremos. Esse método é conhecido como método dos blocos máximos ou mínimos. Na segunda abordagem da TVE, uma observação é considerada um valor extremo máximo (ou mínimo), quando excede um determinado limiar suficientemente alto (ou baixo), conhecido como *threshold*. Essa técnica de obtenção de valores extremos é conhecida como POT (do inglês *Peaks Over Threshold*). As observações que excedem um determinado *threshold* u são chamadas de excessos ou excedências.

Nas Figuras 1 e 2 são ilustradas essas duas definições de valor extremo. Na Figura 1, as observações X_2, X_5, X_7 e X_{11} representam os máximos de quatro blocos, sendo que cada bloco possui três observações. Na Figura 2, as observações $X_1, X_2, X_5, X_7, X_8, X_9$ e X_{11} excedem o *threshold* u , e dessa forma, constituem os valores extremos.

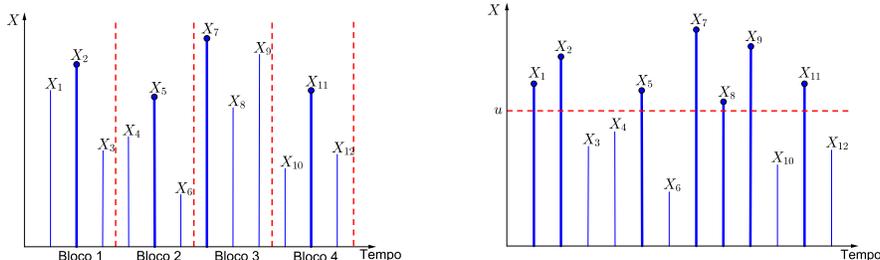


Figura 1 - Máximos nos blocos 1, 2, 3 e Figura 2 - Excessos acima de um limiar u .

No presente trabalho foi utilizada a metodologia POT para a composição das séries históricas de precipitações máximas em Piracicaba-SP, nos meses de outubro a março. Esses meses foram escolhidos em função de apresentarem as maiores precipitações ao longo do ano na região de estudo. A forma como cada conjunto de precipitações máximas mensais foi constituído é abordado a seguir, após algumas considerações acerca da escolha do *threshold* u .

1.1.3 A escolha do limiar

Conforme Coles (2001), a escolha de um limiar suficientemente alto nem sempre é tão simples. A escolha de um *threshold* u está sujeita ao que é denominado

trade-off entre variância e viés. Um *threshold* baixo implica em um maior número de observações. Neste caso, são introduzidas no conjunto de dados algumas observações do centro da distribuição. Como consequência do maior número de observações, os estimadores possuirão menor variância, porém com maior viés. Por outro lado, a escolha de um *threshold* alto reduz o viés dos estimadores, porém os tornam mais imprecisos (maior variância), devido a utilização de uma menor quantidade de observações para sua estimação.

Para seleção do limiar em cada um dos meses do estudo foi utilizado o método proposto por Davison e Smith (1990), que consiste na escolha de um limiar por meio da análise do gráfico da média dos excessos. Para a determinação visual do valor de u , foi utilizado o gráfico de vida média residual, que é construído da seguinte forma:

$$\left\{ \left(u, \frac{1}{n_u} \sum_{i=1}^{n_u} (x_{(i)} - u) \right) : u < x_{\max} \right\},$$

em que (x_1, \dots, x_{n_u}) são as n_u observações que excedem u .

Conforme Mendes (2004), deve-se procurar aquele(s) valor(es) de u de tal maneira que acima dele as observações (x_1, \dots, x_{n_u}) se tornem mais ou menos lineares. Em adição a esse primeiro critério, um segundo procedimento a ser adotado para a seleção de um limiar é verificar se as pressuposições de independência das observações e de ajuste do modelo aos dados são satisfeitas. Em alguns casos, um valor candidato a *threshold* pode fornecer um conjunto de observações extremas que não satisfaz uma dessas pressuposições de análise. Na Figura 3 é apresentado o gráfico da média dos excessos considerando a variável climática precipitação máxima.

Pode-se verificar na Figura 3 que as médias dos excedentes apresentam decréscimo até o nível pluviométrico de 45mm. A mudança na inclinação e a linearidade entre 45mm e 57mm indicam um conjunto de possíveis valores candidatos a *threshold*. Como mencionado anteriormente, após escolher-se um valor como *threshold*, deve-se verificar se o conjunto de valores extremos selecionados a partir desse valor satisfaz as pressuposições de análise. O comportamento irregular após o nível pluviométrico de 57mm deve-se ao pequeno número de excedentes acima desse nível.

Após essas considerações acerca da escolha do *threshold*, pode-se proceder aos detalhes sobre a composição do conjunto de precipitações máximas para cada um dos meses do estudo. Para exemplificar, será utilizado o mês de janeiro, sendo análoga à descrição para os demais meses. Para utilizar a metodologia POT, o procedimento inicial foi formar o vetor com nk observações $\{x_i\}_i^{nk}$ para o mês de janeiro. Uma vez que o mês de janeiro possui 31 dias e o período de estudo é de 1917 a 2015, as quantidades n e k representam respectivamente a quantidade de precipitações diárias observadas desses meses ($n = 31$) e a quantidade de anos utilizados no estudo. O segundo procedimento foi selecionar o *threshold* u , com base no gráfico da média dos excessos. Assim, a amostra de precipitações máximas

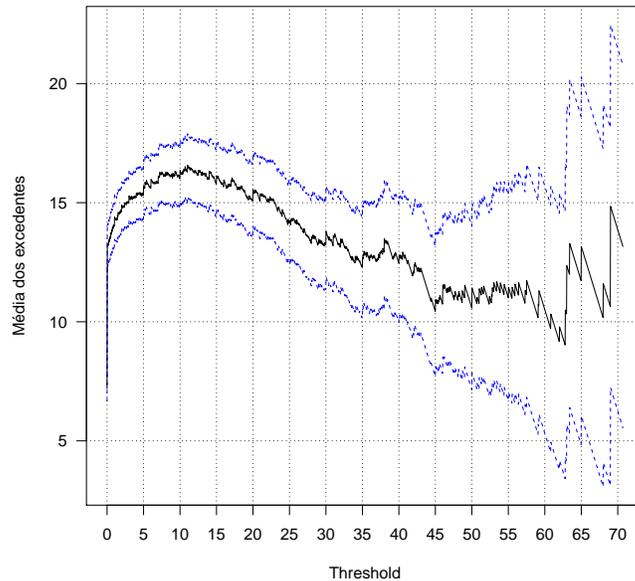


Figura 3 - Gráfico da média dos excessos.

do mês de janeiro foi constituída, pela seleção dos n_u excessos acima do limiar u .

Os procedimentos descritos para a composição do conjunto de precipitações máximas em janeiro foi aplicado de forma análoga nos demais meses. Logo, foram selecionados ao todo seis *thresholds*. A quantidade de anos com registros de precipitação diária variou entre os meses de outubro a março, devido à indisponibilidade de observações em alguns anos do estudo.

1.1.4 Análise exploratória dos dados

A análise exploratória dos dados baseou-se na estimação das medidas de tendência central (média e mediana), nas medidas de dispersão (variância, desvio padrão e coeficiente de variação (CV)) e nos coeficientes de assimetria e de curtose.

1.1.5 Teste de independência de Ljung-Box

Uma pressuposição que deve ser verificada para a utilização das distribuições de valores extremos e também dos estimadores de máxima verossimilhança é a verificação da independência entre as observações. Assim, para avaliar a independência entre as observações em cada mês foi utilizado o teste proposto por Ljung e Box (1978). Conforme Ljung e Box (1978), o teste de Ljung-Box,

também conhecido como teste de Portmanteau, é um teste que verifica se alguns grupos de autocorrelação de uma série temporal são diferentes de zero. Esse teste verifica a aleatoriedade total baseando-se no número de desvios, ao invés de testar a aleatoriedade de cada desvio distinto. Se representarmos o coeficiente de autocorrelação por r , temos que o par de hipóteses desse teste consiste em:

$$\begin{cases} H_0 : r_1 = r_2 = \dots = r_k = 0 \\ H_1 : \text{pelo menos um } r_k \text{ não é nulo.} \end{cases}$$

A estatística do teste de Ljung-Box é dada por:

$$Q = n(n+2) \sum_{k=1}^S \frac{r_k^2}{(n-k)}, \quad (1)$$

em que n é o número de observações, S é o número de coeficientes para se testar a autocorrelação e r_k é o coeficiente de autocorrelação para o desvio k .

A estatística em (1) distribuí-se como uma $\chi^2_{(S)}$ com S graus de liberdade. Escolhendo um nível de significância α , rejeita-se a hipótese H_0 de que todos os coeficientes de autocorrelação são iguais a zero se Q for superior ao valor crítico $\chi^2_{\alpha, S}$ de uma distribuição Qui-Quadrado. A hipótese nula também é rejeitada quando o valor p é inferior ao nível de significância α adotado.

1.1.6 Distribuição generalizada de Pareto (GP)

Seja (X_1, \dots, X_n) uma amostra aleatória iid de uma variável aleatória X , que possui função de distribuição (fd) F_X . Para um determinado *threshold* u , um conjunto de n_u excedências será obtido a partir da amostra original. A nova amostra será construída através da transformação:

$$Y = X - u | X > u .$$

Se x_{\max} é a maior das observações de (X_1, \dots, X_n) , a fd dos excessos acima do nível u é caracterizada por:

$$H(y) = P(X - u \leq y | X > u) = \frac{P(u < X \leq y + u)}{P(X > u)} = \frac{F_X(y + u) - F_X(u)}{1 - F_X(u)},$$

em que $y > 0$ e $u < x_{\max}$, sendo H chamada de fd dos excessos.

Balkema e de Haan (1974) e Pickands (1975) demonstraram que a distribuição assintótica dos valores de uma variável aleatória que excedem um limiar pode ser aproximada por meio da distribuição Generalizada de Pareto (GP, do inglês *Generalized Pareto*). A fd da GP é dada por:

$$H(y; \sigma_u, \xi) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \xi \frac{y}{\sigma_u}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \text{para } y \geq 0 \text{ e } \xi > 0, \\ 1 - \exp\left(-\frac{y}{\sigma_u}\right), & \text{para } y \geq 0 \text{ e } \xi \rightarrow 0, \\ 1 - \left(1 + \xi \frac{y}{\sigma_u}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \text{para } 0 \leq y \leq -\frac{\sigma_u}{\xi} \text{ e } \xi < 0, \end{cases}$$

Em termos de X , a fd GP pode ser reescrita como:

$$H(x; u, \sigma_u, \xi) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \xi \frac{x-u}{\sigma_u}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \text{para } x \geq u \text{ e } \xi > 0, \\ 1 - \exp\left(-\frac{x-u}{\sigma_u}\right), & \text{para } x \geq u \text{ e } \xi \rightarrow 0, \\ 1 - \left(1 + \xi \frac{x-u}{\sigma_u}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \text{para } u \leq x \leq u - \frac{\sigma_u}{\xi} \text{ e } \xi < 0, \end{cases}$$

em que u , σ_u e ξ denotam respectivamente os parâmetros de locação, escala e forma, com $-\infty < u < \infty$, $\sigma_u > 0$ e $\xi \in \mathbb{R} - \{0\}$. Para $\xi \rightarrow 0$, $\xi > 0$ e $\xi < 0$, a fd GP reduz-se à classe de distribuições do tipo I ou Exponencial, do tipo II ou Pareto ou do Tipo III ou Beta, respectivamente.

Na Figura 4 é apresentada a função densidade de probabilidade da distribuição GP para os três casos possíveis, em que pode-se observar como o comportamento da cauda dessa distribuição é influenciado pelo parâmetro de forma ξ , com destaque ao caso em que $\xi \rightarrow 0$ (Exponencial). Esse parâmetro está relacionado com o peso da cauda da distribuição, e por essa razão, também é denominado índice de cauda. Quando $\xi < 0$, as distribuições se caracterizam por terem caudas leves e com suporte superior finito. Quando $\xi > 0$, as distribuições apresentam cauda pesada, possuindo limite superior do suporte infinito. A família Exponencial ($\xi \rightarrow 0$) corresponde ao caso intermediário, isto é, essa família possui caudas mais leves quando comparada com a família Pareto ($\xi > 0$), mas possui caudas mais pesadas em relação a família Beta ($\xi < 0$) (FIGURA 4). Essas considerações acerca do parâmetro de forma ξ resultam em diferentes aplicações das três famílias de distribuições de valores extremos, em função de seus diferentes comportamentos na direção do extremo.

1.1.7 Estimação dos parâmetros

Os parâmetros das distribuição GP e Exponencial foram estimados utilizando-se método da máxima verossimilhança. Se (x_1, \dots, x_{n_u}) são os n_u excessos em relação a um *threshold* u , para $\xi \neq 0$, a log-verossimilhança é dada por:

$$l(u, \sigma_u, \xi | \mathbf{x}) = -n_u \log \sigma_u - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^{n_u} \log \left(1 + \xi \frac{x_i - u}{\sigma_u}\right),$$

em que $(1 + \sigma_u^{-1} \xi x_i) > 0$ para $i = 1, \dots, n_u$. Caso contrário, $l(u, \sigma_u, \xi | \mathbf{x}) = -\infty$. Para o caso em que $\xi \rightarrow 0$ (Exponencial), a função log-verossimilhança é dada por:

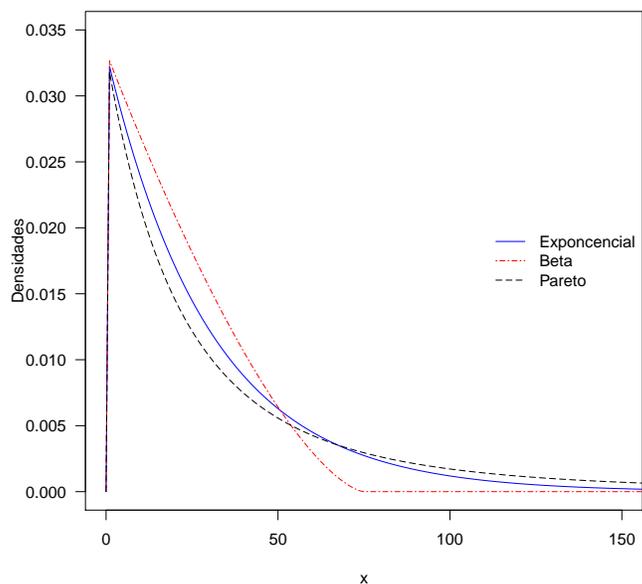


Figura 4 - Função densidade de probabilidade da distribuição Generalizada de Pareto para $\xi = -0,4$ (Beta), $\xi = 0,4$ (Pareto) e $\xi \rightarrow 0$ (Exponencial), com $u = 0$ e $\sigma_u = 30$.

$$l(u, \sigma_u | \mathbf{x}) = -n_u \log \sigma_u + \sum_{i=1}^{n_u} \left(-\frac{x_i - u}{\sigma_u} \right).$$

Para a obtenção das estimativas dos parâmetros, a maximização analítica da função de log-verossimilhança não é possível, o que exige a utilização de métodos numéricos (COLES, 2001, p. 80-81). Em particular, a fim de comparação, também será considerado o estimador equivariante de risco mínimo de locação-escala (PRABAKARAN e CHANDRASEKAR, 1994), para a estimação dos parâmetros de locação e de escala da distribuição Exponencial. Esses estimadores são dados por:

$$\hat{u} = X_{(1)} - \frac{1}{n_u} \sum_{i=2}^{n_u} (X_{(i)} - X_{(1)}).$$

$$\hat{\sigma}_u = \frac{1}{n_u} \sum_{i=2}^{n_u} (X_{(i)} - X_{(1)}).$$

Para distinguir a distribuição Exponencial ajustada com estimativas obtidas via método da máxima verossimilhança e com estimativas equivariantes, será adotada a notação Exponencial_{MV} e Exponencial_E , respectivamente.

1.1.8 Teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov

O ajuste das distribuições às séries históricas mensais foi avaliado utilizando-se o teste de Kolmogorov-Smirnov (KS). O teste de KS é um teste de aderência não paramétrico. A estatística desse teste, denotada por D , é usada para testar se uma amostra aleatória originou-se de uma população com uma função distribuição especificada. A estatística D baseia-se na diferença máxima das funções de probabilidades acumuladas, empírica e teórica (SIEGEL et al., 2006).

Inicialmente, na hipótese nula é especificada alguma fd $F_X(x)$, sob a qual reside a hipótese de ter originado o conjunto de observações amostrais. O teste de KS adapta a fd hipotética $F_X(x)$ à fd empírica $S_n(x)$, determinando se a diferença máxima entre essas funções é significativa. Nesse sentido, uma amostra (x_1, \dots, x_n) é retirada de uma população, que não é conhecida. O confronto entre $S_n(x)$ e $F_X(x)$ é estabelecido para verificar se é razoável estudar os dados amostrais utilizando $F_X(x)$, admitida como a verdadeira fd da amostra casualizada.

Para a realização do teste de KS seguem-se os seguintes passos:

- i) Colocar as observações em ordem ascendente;
- ii) Calcular as frequências acumuladas em cada classe e estimar os parâmetros de $F_X(x)$;
- iii) Obter as probabilidade acumuladas da distribuição teórica $F_X(x_{(i)})$ e da distribuição empírica $S_n(x_{(i)})$ em cada classe. Considerando a fd empírica $S_n(x)$, para uma determinada classe de frequência, $S_n(x) = fa/(n + 1)$, em que fa é a frequência acumulada da classe;
- iv) Calcular a estatística D , que é dada por:

$$D = \max |F_X(x_{(i)}) - S_n(x)|.$$

- v) A hipótese H_0 , de que os dados provêm de uma população com distribuição teórica $F_X(x)$, é testada pela comparação do valor observado de D com um valor crítico tabelado de D ou pela comparação do valor p com o nível de significância adotado (α).

1.1.9 Teste da razão de verossimilhanças

Uma das dificuldades iniciais para a aplicação das três formas assintóticas de valores extremos é escolher, dentre as três famílias possíveis, a mais adequada para descrever um determinado conjunto de dados. A distribuição Exponencial é uma opção atrativa, por ser um modelo mais simples e por possuir índice de cauda nulo

($\xi = 0$). Essa distribuição corresponde a um modelo de transição entre a família de distribuições com $\xi < 0$, que possui limite superior do suporte finito, e a família de distribuições com $\xi > 0$, que possui limite superior de suporte infinito. Por essas razões é interessante considerar a hipótese do modelo Exponencial ser apropriado contra a hipótese alternativa de não ser, o que pode ser expresso pelo seguinte par de hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \xi = 0 \\ H_1 : \xi \neq 0 \end{cases} \quad (2)$$

Para testar as hipóteses definidas em (2), o teste de razão de verossimilhanças (TRV) pode ser aplicado (COLES, p. 34-36). Se \mathcal{M}_0 e \mathcal{M}_1 são dois modelos encaixados ou aninhados ($\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_1$), a estatística do TRV é dada pela *deviance*, que é definida como:

$$\mathcal{D} = 2 \{l_1(\mathcal{M}_1) - l_0(\mathcal{M}_0)\}, \quad (3)$$

em que $l_0(\mathcal{M}_0)$ e $l_1(\mathcal{M}_1)$ são os valores da log-verossimilhança de \mathcal{M}_0 e \mathcal{M}_1 , respectivamente. A estatística \mathcal{D} tem distribuição assintótica $\chi^2_{(1)}$ com um grau de liberdade.

Neste trabalho, o teste da razão de verossimilhanças foi utilizado para avaliar se cada série mensal poderia ser descrita pelo modelo mais simples (Exponencial_{MV}), em detrimento do modelo mais geral (GP). Suponha que (x_1, \dots, x_{n_u}) sejam os n_u excessos para um *threshold* u . Se $l_1(u, \sigma_u, \xi | \mathbf{x})$ e $l_0(u, \sigma_u | \mathbf{x})$ são respectivamente os logaritmos das funções de verossimilhança das distribuições GP e Exponencial_{MV}, a estatística do TRV pode ser reexpressa como:

$$\mathcal{D} = 2 \left\{ l_1(\hat{u}, \hat{\sigma}_u, \hat{\xi} | \mathbf{x}) - l_0(\hat{u}, \hat{\sigma}_u | \mathbf{x}) \right\},$$

Para testar a hipótese $H_0 : \xi = 0$ contra $H_1 : \xi \neq 0$, compara-se o valor da estatística \mathcal{D} , calculada a partir de cada amostra mensal, com o quantil superior da distribuição $\chi^2_{(1)}$ e nível de significância α . Se $\mathcal{D} \geq \chi^2_{\alpha,1}$, a hipótese H_0 é rejeitada.

1.1.10 Níveis de retorno

Seja (x_1, \dots, x_{n_u}) um conjunto de observações máximas. A probabilidade que ocorra um evento extremo superior a x é calculada pelo complementar da fd. Considerando inicialmente a distribuição GP, segue que:

$$P[X > x | X > u] = 1 - \left[1 - \left[1 + \xi \left(\frac{x-u}{\sigma_u} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}} \right] = \left[1 + \xi \left(\frac{x-u}{\sigma_u} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}}.$$

Disso segue que:

$$P[X > x] = \varsigma_u \left[1 + \xi \left(\frac{x - u}{\sigma_u} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}},$$

em que $\varsigma_u = P[X > u]$.

Conforme Coles (2001, p. 81), um nível x_m , que é excedido em média uma vez a cada m observações, é a solução de:

$$\varsigma_u \left[1 + \xi \left(\frac{x_m - u}{\sigma_u} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}} = \frac{1}{m}.$$

Reorganizando, resulta que:

$$x_m = u + \frac{\sigma_u}{\xi} \left[(m\varsigma_u)^\xi - 1 \right],$$

provando que m é suficientemente grande para assegurar que $x_m > u$.

A probabilidade que ocorra um evento extremo superior a x também pode ser calculado pelo complementar da fd da distribuição Exponencial ($\xi \rightarrow 0$), que é dado por:

$$P[X > x | X > u] = 1 - \left[1 - \exp \left(-\frac{x - u}{\sigma_u} \right) \right] = \exp \left(-\frac{x - u}{\sigma_u} \right).$$

Utilizando o mesmo raciocínio que foi realizado para a distribuição GP, tem-se que a função de quantis da distribuição Exponencial é dada por:

$$x_m = u + \sigma_u \log(m\varsigma_u),$$

novamente para m suficientemente grande.

Por construção, x_m é o nível de retorno da m -ésima observação. Para apresentação das informações, é mais conveniente fornecer os níveis de retorno em uma escala anual. Desse modo, um nível de retorno anual z_T é o nível esperado para ser excedido uma vez a cada T anos (em média). Se existem n_y observações por ano, isso corresponde ao nível de retorno da m -ésima observação, sendo $m = T \times n_y$.

Consequentemente, conhecidas as estimativas dos parâmetros, os níveis de retorno máximos para uma variável X , em um tempo médio T (em anos), podem ser calculados pelas distribuições GP e exponencial respectivamente por:

$$z_T = \hat{u} + \frac{\hat{\sigma}_u}{\hat{\xi}} \left[(Tn_y\hat{\varsigma}_u)^{\hat{\xi}} - 1 \right].$$

$$z_T = \hat{u} + \hat{\sigma}_u \log(Tn_y\hat{\varsigma}_u).$$

Pode-se verificar que também é necessário a estimação de ς_u . Como ς_u é a probabilidade de uma observação exceder o *threshold* u , um estimador natural é a proporção de pontos que excedem u , dada por:

$$\hat{\zeta}_u = \frac{n_u}{n},$$

em que n é o tamanho da amostra original.

1.1.11 Seleção da distribuição com resultados mais acurados

Para analisar a distribuição que fornece precipitações máximas esperadas mais acuradas em cada mês, adotou-se o critério do menor erro quadrático médio (EQM), que é dado por:

$$EQM = \sum_{i=1}^n \frac{(\widehat{Pe}_i - Po_i)^2}{n}, \quad (4)$$

em que \widehat{Pe}_i é a precipitação máxima esperada no i -ésimo tempo de retorno, Po_i é a maior precipitação máxima observada no intervalo de tempo $(t ; t+T)$, sendo T o tempo de retorno (em anos) e n corresponde ao número de valores de precipitação máxima comparados.

Para o cálculo do EQM, as observações de precipitação máxima em cada mês foram divididas em duas séries. A primeira de 1917-1986 foi utilizada para estimar os parâmetros e calcular as precipitações máximas prováveis para os tempos de retorno de 5, 10, 15, 20 e 25 anos. Da segunda série, de 1987-2011, extraiu-se a maior precipitação máxima observada para os seguintes intervalos de tempo: 5 anos (1987 ; 1991), 10 anos (1987 ; 1996), 15 anos (1987 ; 2001), 20 anos (1987 ; 2006) e 25 anos (1987 ; 2011), para cada mês.

1.1.12 Recursos computacionais

Todas as análises estatísticas foram realizadas no software R (R CORE TEAM, 2016). Os pacotes *evd* (STEPHENSON, 2002) e *fBasics* (WUERTZ et al., 2014) da biblioteca do R foram utilizados para o estudo das séries históricas mensais. Em particular, o pacote *evd* foi utilizado para a análise dos dados, por possuir funções específicas na análise de valores extremos.

2 Resultados e Discussão

Na Tabela 1 são apresentadas algumas estatísticas descritivas dos dados de precipitação máxima (mm) dos meses de outubro a março em Piracicaba-SP, relativos ao período de 1917 a 2015. Pode-se observar que o valor do CV nos períodos mensais analisados variou de 17,38 a 24,58. Desse modo, a variabilidade dos dados pode ser classificada como média ($12\% < CV < 60\%$), conforme a classificação dos limites do CV proposta por Warrick e Nielsen (1980). Pode-se verificar também que, em média, a precipitação máxima em Piracicaba-SP nos meses estudados variou de 48,89mm (outubro) a 71,18mm (fevereiro). Nota-se também que as medianas em

todas séries históricas mensais são inferiores às médias amostrais observadas, o que sugere que as distribuições empíricas mensais são assimétricas à direita. Esse fato é reforçado com base nos valores positivos do coeficiente de assimetria. O grau de achatamento das distribuições empíricas, em todos os meses, foi classificada como platicúrtica, conforme os resultado do coeficiente de curtose (< 3).

Tabela 1 - Estatísticas descritivas dos dados de precipitação máxima mensal (mm) em Piracicaba-SP, no período de 1917 a 2015

Mês	Mediana	Média	Variância	Desvio Padrão	Coef. de variação (%)	Coef. de assimetria	Coef. de curtose
Janeiro	65,00	69,53	146,10	12,09	17,38	1,25	0,46
Fevereiro	64,55	71,18	306,12	17,50	24,58	1,07	0,08
Março	55,40	58,64	175,54	13,24	22,59	1,50	2,77
Outubro	46,80	48,89	80,77	8,99	18,38	1,04	0,34
Novembro	61,50	67,79	211,98	14,56	21,47	1,03	$< 0,01$
Dezembro	66,45	71,24	178,14	13,35	18,73	1,48	1,64

Coef.: Coeficiente

Na Tabela 2 são apresentados os *thresholds* escolhidos e as estimativas dos parâmetros das distribuições GP e Exponencial_{MV}, obtidas utilizando-se o método da máxima verossimilhança. Analisando-se as estimativas do parâmetro de forma da distribuição GP, observa-se que suas estimativas pontuais são todas inferiores a zero, o que sugere a hipótese da distribuição dessas observações ser a distribuição Beta. Por possuir cauda superior com limite finito (FIGURA 4), essa distribuição é apropriada para modelar fenômenos ambientais, como precipitação pluviométrica máxima. Ainda na Tabela 2, pode-se verificar que o tamanho das amostras variou de 18 a 53 observações.

Tabela 2 - Thresholds escolhidos e estimativas dos parâmetros das distribuições Generalizada de Pareto (GP) e Exponencial_{MV} com seus respectivos erros padrão([]), obtidos pelo método da máxima verossimilhança

Mês	Threshold (\hat{u})	n	GP		Exponencial _{MV}
			$\hat{\sigma}_u$	$\hat{\xi}$	$\hat{\sigma}_u$
Janeiro	57,00	34	13,62 [3,74]	-0,08 [0,21]	12,53 [2,15]
Fevereiro	53,00	36	20,17 [5,68]	-0,11 [0,23]	18,18 [3,03]
Março	43,00	53	18,18 [3,19]	-0,16 [0,11]	15,64 [2,15]
Outubro	39,00	36	11,83 [3,03]	-0,19 [0,20]	9,87 [1,65]
Novembro	52,00	18	18,86 [6,82]	-0,19 [0,28]	15,79 [3,72]
Dezembro	57,00	40	15,62 [3,59]	-0,10 [0,17]	14,24 [2,25]

Pela análise dos resultados do teste de Ljung-Box (TABELA 3), pode-se verificar que as observações das séries mensais estudadas são independentes (valor $p > 0,05$). Sartori et al. (2010) não obtiveram resultados semelhantes no município de Botucatu-SP. Ao analisar séries históricas da Fazenda Lageado da UNESP de Botucatu-SP (1988-2007), referentes à precipitação pluviométrica, umidade relativa do ar e temperatura do ar, os autores verificaram que as observações das três variáveis climáticas estudadas apresentaram forte dependência temporal.

Tabela 3 - Resultados dos testes (valor p) de independência (Ljung-Box), de aderência (Kolmogorov-Smirnov) e do teste de razão de verossimilhanças (TRV), referentes ao ajuste das distribuições Generalizada de Pareto (GP) e Exponencial_{MV} aos dados de precipitação máxima mensal em Piracicaba-SP

Mês	Ljung-Box	Kolmogorov-Smirnov		TRV
		GP	Exponencial _{MV}	
Janeiro	0,3510	0,5303	0,6426	0,7017
Fevereiro	0,1101	0,4109	0,5373	0,6516
Março	0,6397	0,6383	0,6233	0,2154
Outubro	0,1607	0,3899	0,5436	0,3858
Novembro	0,1485	0,5271	0,7249	0,5417
Dezembro	0,8874	0,5617	0,7071	0,5852

Os resultados do teste de KS (TABELA 3) indicam para todos os meses sob estudo, que as distribuições GP e Exponencial_{MV} ajustaram-se aos dados (valor $p > 0,05$). Como a distribuição Exponencial é um caso especial da distribuição GP (modelos aninhados), verificou-se também o ajuste da distribuição Exponencial comparando-a com o modelo mais completo (GP), utilizando-se o Teste da Razão de Verossimilhança (TRV). Em todos os meses não houve evidências estatísticas para a rejeição da hipótese $H_0 : \xi = 0$ (valor $p > 0,05$). Neste caso, a distribuição Exponencial_{MV} é o modelo mais adequado para modelar os dados de precipitação máxima considerados. Como a distribuição Exponencial_{MV} mostrou-se mais adequada, procedeu-se também ao ajuste da distribuição Exponencial_E.

Na Tabela 4 estão apresentadas as estimativas equivariantes dos parâmetros de locação e de escala da distribuição Exponencial_E e os resultados do teste de KS, referentes ao ajuste dessa distribuição aos dados de precipitação máxima. Conforme os resultados do teste de KS, a distribuição Exponencial_E ajustou-se aos dados em todos os períodos mensais considerados (valor $p > 0,05$). No município de Piracicaba-SP, verificou-se uma certa carência de estudos de valores extremos utilizando-se a metodologia POT e as distribuições que originam-se dessa metodologia. A maioria dos estudos observados na literatura utiliza as distribuições de valores extremos que originam-se do método dos blocos máximos, como as distribuições Gumbel e Generalizada de Valores Extremos (BAUTISTA et al., 2004; SANSIGOLO, 2008).

Tabela 4 - Estimativas equivariantes dos parâmetros da distribuição Exponencial_E com seus respectivos erros padrão ([]) e resultados do teste Kolmogorov-Smirnov (valor *p*) referentes ao seu ajuste aos dados de precipitação máxima mensal em Piracicaba-SP

Mês	Estimativas		Kolmogorov-Smirnov
	\hat{u}	$\hat{\sigma}_u$	
Janeiro	56,94 [0,63]	12,23 [2,08]	0,7170
Fevereiro	52,70 [0,47]	17,98 [2,80]	0,6448
Março	43,11 [0,52]	15,24 [1,79]	0,6769
Outubro	38,93 [0,08]	9,69 [1,45]	0,6085
Novembro	51,55 [1,49]	15,39 [3,32]	0,8416
Dezembro	56,85 [0,32]	14,05 [2,04]	0,7763

Na Tabela 5 estão apresentadas as precipitações máximas (mm) esperadas em Piracicaba-SP para os tempos de retorno de 10, 30, 50, 70 e 100 anos, nos meses de outubro a março, obtidas via distribuições Exponencial_{MV} e Exponencial_E. Uma interpretação dessas informações pode ser feita do seguinte modo: escolhendo o mês de março e o tempo de retorno de 30 anos, conforme o resultado obtido utilizando-se a distribuição Exponencial_{MV}, espera-se que em um tempo médio de 30 anos, que em pelo menos um dia desse mês, ocorra uma precipitação máxima superior ou igual a 96,19mm.

Tabela 5 - Precipitações máximas (mm) esperadas em Piracicaba-SP para os tempos de retorno de 10, 30, 50, 70 e 100 anos, nos meses de outubro a março, obtidas via distribuições Exponencial_{MV} e Exponencial_E

Mês	Distribuição	Tempos de retorno				
		10	30	50	70	100
Janeiro	Exponencial _{MV}	85,86	99,63	106,03	110,24	114,71
	Exponencial _E	85,11	98,54	104,79	108,91	113,27
Fevereiro	Exponencial _{MV}	94,86	114,84	124,12	130,24	136,72
	Exponencial _E	94,10	113,86	123,04	129,09	135,50
Março	Exponencial _{MV}	79,01	96,19	104,18	109,44	115,02
	Exponencial _E	78,20	94,95	102,73	107,86	113,29
Outubro	Exponencial _{MV}	61,76	72,62	77,67	81,00	84,53
	Exponencial _E	61,23	71,88	76,82	80,08	83,54
Novembro	Exponencial _{MV}	88,36	105,70	113,77	119,08	124,71
	Exponencial _E	86,98	103,89	111,75	116,92	122,41
Dezembro	Exponencial _{MV}	89,80	105,45	112,73	117,52	122,60
	Exponencial _E	89,19	104,62	111,79	116,52	121,53

Pode-se verificar também que, as maiores precipitações máximas mensais são

esperadas no mês de fevereiro, em todos os tempos de retorno (TABELA 5). Os resultados obtidos por Sansigolo (2008) corroboram com os resultados obtidos pelas distribuições Exponencial_{MV} e Exponencial_E no mês de fevereiro. Ao utilizar a distribuição Gumbel na modelagem das precipitações máximas diárias de Piracicaba-SP, no período de 1917 a 2004, Sansigolo (2008) verificou, para os tempos de retorno de 50 e 100 anos, que são esperadas ocorrências de precipitações máximas diárias iguais ou superiores a 119 ± 9 mm e 129 ± 10 mm, respectivamente.

Pode-se observar que já a partir do tempo de retorno de 10 anos são esperadas a ocorrência de precipitações superiores a 85mm nos meses de janeiro, fevereiro, novembro e dezembro. A ocorrência de precipitações pluviométricas dessa magnitude em um curto período de tempo podem ocasionar enchentes e inundações em Piracicaba-SP. A ocorrência desses fenômenos pode ser associada também a fatores relacionados a intervenção humana sobre o meio ambiente, como desmatamentos de encostas, ocupação de planícies de inundação, ao assoreamento dos rios e a impermeabilização urbana (MARCELINHO, 2008). Uma vez que não é possível evitar a ocorrência de eventos extremos de precipitação, a tomada de ações de correção e de prevenção, por órgãos responsáveis de Piracicaba-SP, podem minimizar os eventuais danos e prejuízos que venham a ser causados por inundações na área urbana desse município.

Na Tabela 6 são apresentados os resultados dos EQM's mensais para as distribuições Exponencial_{MV} e Exponencial_E. Primeiramente, foi necessário verificar se as observações mensais do período utilizado para estimação dos parâmetros e cálculo das precipitações máximas esperadas (1917-1986) satisfazem as pressuposições de análise. Pode-se observar que a pressuposição de independência das observações de cada série mensal foi satisfeita, conforme os resultados do teste de Ljung-Box (valor $p > 0,05$). Além disso, os resultados do teste de KS (valor $p > 0,05$) indicaram que as distribuições Exponencial_{MV} e Exponencial_E ajustaram-se aos dados em todos os meses. Como as pressuposições de independência e ajuste das distribuições foi satisfeita, pode-se proceder ao cálculo dos EQM's mensais (TABELA 6).

Tabela 6 - Erros quadráticos médios (EQM's) mensais referentes aos níveis máximos esperados de precipitação em Piracicaba-SP, obtidos via distribuições Exponencial_{MV} (Exp_{MV}) e Exponencial_E (Exp_E)

Mês	Ljung-Box	Kolmogorov-Smirnov		EQM	
		Exp _{MV}	Exp _E	Exp _{MV}	Exp _E
Janeiro	0,2575	0,6128	0,7253	356,71	391,52
Fevereiro	0,9667	0,8612	0,9003	26,86	35,19
Março	0,6057	0,5126	0,5474	222,24	239,23
Outubro	0,6064	0,6533	0,7308	110,08	117,16
Novembro	0,1863	0,7016	0,5260	428,97	260,68
Dezembro	0,7492	0,6751	0,7860	572,36	535,61

Pode-se observar que a distribuição Exponencial_{MV} forneceu menores EQM's

nos meses de janeiro, fevereiro, março e outubro, quando comparada à distribuição Exponencial_E. Em termos práticos, esses resultados indicam que a distribuição Exponencial_{MV} possui maior acurácia na modelagem dos níveis máximo de precipitação nesses meses. Nesses meses, as estimativas obtidas via estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros da distribuição Exponencial são preferidos em relação às estimativas obtidas via estimadores equivariantes. Nos demais meses (novembro e dezembro), o melhor desempenho foi alcançado pela distribuição Exponencial_E, sendo análoga a interpretação dos resultados à descrição realizada para a distribuição Exponencial_{MV}, isto é, nesses meses os estimadores equivariantes são preferidos para o ajuste da distribuição Exponencial em detrimento dos estimadores de máxima verossimilhança.

Mesmo não apresentando melhor desempenho em quatro meses estudados, um fato importante é que os estimadores equivariantes dos parâmetros da distribuição Exponencial fornecem mais uma opção para a modelagem de dados utilizando essa distribuição. Outros cenários de análise podem ser propostos para a distribuição Exponencial com estimadores equivariantes, envolvendo aplicações com outras variáveis. Além disso, outros critérios de avaliação dos estimadores podem ser adotados, em detrimento da utilização do EQM.

Conclusões

- i) Em todos os períodos mensais analisados verificou-se o ajuste das distribuições GP, Exponencial_{MV} e Exponencial_E aos dados.
- ii) A distribuição Exponencial_{MV} mostrou-se mais adequada para modelar os dados em todos os períodos mensais, quando comparada à distribuição GP.
- iii) Os maiores níveis de precipitação máxima em Piracicaba-SP são esperados para o mês de fevereiro.
- iv) A distribuição Exponencial ajustada com estimativas de máxima verossimilhança apresentou maior acurácia nos meses de janeiro, fevereiro, março e outubro, enquanto a distribuição Exponencial ajustada com estimativas equivariantes apresentou melhor desempenho nos meses de novembro e dezembro.

3 Agradecimentos

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela concessão da bolsa de estudo e aos dois revisores pelas sugestões apresentadas.

REIS, C. J.; CHAVES, L. M.; SOUZA, D. J. Evaluation of equivariants and maximum likelihood estimators in maximum rainfall events. *Rev. Bras. Biom.*, Lavras, v.35, n.3, p.537-557, 2017.

■ **ABSTRACT:** A climatic variable whose behavior is of great interest is rainfall, since various economical activities and environmental processes are highly dependent on it. The aim in the present work: *i*) check the fit of the exponential distribution to maximum rainfall data in Piracicaba-SP, in the months from October to March, *ii*) calculate the expected maximum precipitation for return periods of 10, 30, 50, 70 and 100 years in these months, using equivariants and maximum likelihood estimators, *iii*) to compare the exponential distribution adjusted using equivariant estimators ($Exponential_E$) with the one adjusted using maximum Likelihood ($Exponential_{ML}$) in order to select, in each month, the more accurate results. The data of maximum precipitation (1917-2015) were obtained from the agrometeorological conventional station of the Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz” (ESALQ / USP). The $Exponential_E$ and $Exponential_{ML}$ distributions fits data every month. The exponential distribution E was more suitable to model the maximum rainfall data in November and December. In the remaining months, the distribution $Exponential_{ML}$, performed better.

■ **KEYWORDS:** Extreme values; Exponential distribution; return times; planning.

Referências

BALKEMA, A. A.; DE HAAN, L. Residual life time at great age. *Annals of Probability*, n.2, p.792-804, 1974.

BAUTISTA, E.A.L.; ZOCCHI, S.S.; ANGELOCCI, L.R. A distribuição Generalizada de Valores Extremos aplicada ao ajuste dos dados de velocidade máxima do vento em Piracicaba, São Paulo, Brasil. *Revista de Matemática e Estatística*, São Paulo, v.22, n.1, p.95-111, 2004.

COLES, S. *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*. London: Springer, 2001. 228 p.

DAVISON, A. C.; SMITH, R. L., Models for exceedances over high thresholds. *Journal of the Royal Statistical Society B*, n.52, p.393-442, 1990.

ESALQ/USP, Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”, Universidade de São Paulo. *Base de Dados Meteorológicos*. Disponível em: <<http://www.esalq.usp.br/departamentos/leb/posto.html>>. Acesso em: 05 jan. 2016.

GHIBERTO, P. J.; MORAES, S. O. Comparação de métodos de determinação da Condutividade hidráulica em um latossolo Vermelho-amarelo. *Revista Brasileira de Ciência do Solo*, Viçosa, v.35, p.1177-1188, 2011.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (IBGE). *Banco de dados Cidades@*. 2010. Disponível em: <<http://www.ibge.gov.br/cidadesat/>>

xtras/temas.php?codmun=353870&idtema=16&search=sao-paulo|piracicaba>. Acesso em: 07 jan. 2016.

LJUNG, G. M.; BOX, G. E. P. On a measure of lack of fit in time series models. *Biometrika*, v.65, p.297-303, 1978.

MARCELINHO, E. V. *Desastres naturais e geotecnologias: conceitos básicos*. Santa Maria: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE/CRS, 2008.

MARENGO, J. A.; NOBRE, C. A.; TOMASELLA, J.; CARDOSO, M. F. OYAMA, M. D. Hydro-climatic and ecological behaviour of the drought of Amazonia in 2005. *Philosophical Transactions of the Royal Society B*, v.363, p.1773-1778, 2008.

MARENGO, J. A. Mudanças climáticas, condições meteorológicas extremas e eventos climáticos no Brasil. In: MARENGO, J. A.; SCHAEFFER, P.; PINTO, H. S.; ZEE, D. M. W.; LUCENA, A. F. P.; SZKLO, A. *Mudanças climáticas e eventos extremos no Brasil*. Rio de Janeiro: Fundação Brasileira para o Desenvolvimento Sustentável (FBDS) e Lloyd's, 2010. p.4-19. Disponível em: <<http://www.fbds.org.br/fbds/IMG/pdf/doc-504.pdf>>. Acesso em: 20 dez. 2015.

MENDES, B. V. M. *Introdução à análise de eventos extremos*. São Paulo: E-papers Editora, 2004. 232p.

PICKANDS, J. III. Statistical inference using extreme order statistics. *Annals of Statistics*, n.3, p.119-131, 1975.

PRABAKARAN, T.; CHANDRASEKAR, B. Simultaneous equivariant estimation for location-scales models. *Journal of Statistical Planning and Inference*, v.40, p.51-59, 1994.

R CORE TEAM. *R: A language and environment for statistical computing*. Vienna, Austria. Disponível em: <<http://www.r-project.org>>. Acesso em: 15 out. 2016.

SANSIGOLO, C. A. Distribuições de extremos de precipitação diária, temperatura máxima e mínima e velocidade do vento em Piracicaba, SP (1917-2006). *Revista Brasileira de Meteorologia*, São José dos Campos, v.23, n.3, p.341-346, 2008.

SARTORI, A. A. C.; SILVA, A. F.; RAMOS, C. M. C.; ZIMBACK, C. R. L. Variabilidade temporal e mapeamento dos dados climáticos de Botucatu-SP. *Irriga*, Botucatu, v.15, n.2, p.131-139, 2010.

SIEGEL, S.; CASTELLAN JÚNIOR, N. J. *Estatística não-paramétrica para ciências do comportamento*. 2.ed. Porto Alegre: Artmed, 2006. 448 p.

STEPHENSON, A. G. e.vd: Extreme Value Distributions. *R News*, v.2, n.2, p.31-32. 2002.

WARRICK, A. W.; NIELSEN, D. R. Spatial variability of soil physical properties in the field. In: HILLEL, D. *Applications of soil physics*. New York: Academic Press, 1980. p.319-344.

WUERTZ, D.; SETZ, T.; CHALABI, Y. *Rmetrics - Markets and Basic Statistics*. 2014. Disponível em: <<http://CRAN.R-project.org/package=fBasics>>. Acesso em: 22 dez. 2015.

Recebido em 26.01.2016.

Aprovado após revisão em 24.11.2016.